Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique M1MI1002
2011–2012

Devoir surveillé 2

Novembre 2011, Durée 1h, Documents non autorisés

Toutes vos réponses devront être justifiées

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$$g(x, y) = x^2 + xy - x \ .$$

1. *Montrer que f est injective mais pas surjective. Est-elle bijective ?*
   f est injective :
   Soit $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \neq y$. Montrons que $f(x) \neq f(y)$. Supposons que $x > y$ (le cas $x < y$ peut être obtenu en échangeant x et y dans la suite).
   - Si $y > 0$, alors $x > 0$ et $f(x) = 3x + 1 > 3y + 1 = f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$.
   - Si $x \leq 0$, alors $y \leq 0$ et $f(y) = -3y > -3x = f(x)$ donc $f(x) \neq f(y)$.
   - Si $x > 0$ et $y \leq 0$, alors $f(x) = 3x+1$ et $f(y) = -3y$. L'égalité $f(x) \neq f(y)$ supposerait que $3(x+y) = 1$ ce qui est impossible avec x et y dans $\mathbb{Z}$. Donc $f(x) \neq f(y)$ également dans ce cas.

   On a montré que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
   f n'est pas surjective :
   2 n'a pas d'antécédent par f car ni l'équation $-3x = 2$ ni l'équation $3x + 1 = 2$ n'ont de solution dans $\mathbb{Z}$.
2. *Déterminer l'image par g de $(0, 1)$, de $(0, 2)$.*
   $g(0, 1) = g(0, 2) = 0$.
3. *Montrer que g n'est pas injective.*
   Comme $g(0, 1) = g(0, 2)$, g n'est pas injective (0 a plus d'un antécédent par g).
4. *Soit $y \in \mathbb{N}$. Déterminer l'image de $(1, y)$ par g.*
   $g(1, y) = y$
5. *L'application g est-elle surjective ?*
   Oui : d'après la question précédente, tout élément $y \in \mathbb{N}$ a au moins un antécédent par g, l'élément $(1, y)$.
6. *Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui, les expliciter.*
   L'expression $g \circ f$ n'a pas de sens car $Im(f) \not\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'expression $f \circ g$ a un sens car $Im(g) \subseteq \mathbb{Z}$. On a : $f \circ g(x, y) = \begin{cases} -3(x^2 + xy - x) & \text{si } x^2 + xy - x \leq 0 \\ 3(x^2 + xy - x) + 1 & \text{si } x^2 + xy - x > 0 \ . \end{cases}$
   Or $x^2 + xy - x = x(x + y - 1)$ est positif ou nul pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$: c'est clair si $x = 0$, et si $x \geq 1$ on a $x + y - 1 \geq y \geq 0$ d'où $x(x + y - 1) \geq 0$. Enfin, il résulte de

l'analyse précédente que $x(x+y-1)=0$ si et seulement si $x=0$ ou $(x=1 \wedge y=0)$. En conclusion :

$$f \circ g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x=1 \text{ et } y=0 \\ 3(x^2+xy-x)+1 & \text{sinon.} \end{cases} .$$

Exercice 2

Soit E un ensemble. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E. On définit une relation binaire $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A \ \mathcal{R}_X \ B \Leftrightarrow (A \cap X \subseteq B \cap X) \ .$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}_X$ est une relation réflexive et transitive.*

   Montrons que $\mathcal{R}_X$ est réflexive : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On a $A \ \mathcal{R}_X \ A$ car $A \cap X \subseteq A \cap X$.

   Montrons que $\mathcal{R}_X$ est transitive : Soient A, B et C des parties de E telles que $A \ \mathcal{R}_X \ B$ et $B \ \mathcal{R}_X \ C$. Par définition de $\mathcal{R}_X$, on a $A \cap X \subseteq B \cap X$ et $B \cap X \subseteq C \cap X$. Par transitivité de la relation d'inclusion sur E, on en déduit que $A \cap X \subseteq C \cap X$. C'est à dire $A \ \mathcal{R}_X \ C$. Donc la relation $\mathcal{R}_X$ est transitive.

2. *Soit $E = \mathbb{N}$ et $X = \{1\}$. Montrer que $\mathcal{R}_X$ n'est pas antisymétrique. Est-ce une relation d'ordre ?*

   Soient $A = \{1,2\}$ et $B = \{1,3\}$. Ces parties sont telles que $A \ \mathcal{R}_X \ B$ et $B \ \mathcal{R}_X \ A$, alors qu'elles ne sont pas égales. On en déduit que $\mathcal{R}_X$ n'est pas antisymétrique.

Exercice 3

Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ((x<0 \wedge y<0) \vee (x=0 \wedge y=0) \vee (x>0 \wedge y>0)) \ .$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

   Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive : Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si $x<0$ alors on voit bien que $x\mathcal{R}x$. De la même manière, on traite les cas $x=0$ et $x>0$. La relation est réflexive.

   Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique : Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$. La relation binaire $\wedge$ est symétrique donc $y\mathcal{R}x$. Ceci prouve la symétrie.

   Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive : Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Montrons que $x\mathcal{R}z$. Supposons que $x<0$. De $x\mathcal{R}y$, on tire $y<0$. De même, $y\mathcal{R}z$ implique $z<0$. De sorte que dans le cas où $x<0$, on a $x\mathcal{R}z$. De la même manière, on traite les cas $x=0$ qui donne $z=0$, et $x>0$ qui implique $z>0$. La relation est bien transitive.

2. *Déterminer la classe d'équivalence de* 0*.*

   La classe d'équivalence de x est l'ensemble des entiers relatifs y tels que $y\mathcal{R}x$. Parmi les 3 conditions qui définissent la relation, seule $x=0 \wedge y=0$ peut être vérifiée lorsque $x=0$ est fixé. Donc la classe de 0 est $Cl(0) = \{0\}$.

3. *Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.*

   L'ensemble quotient est l'ensemble des classes d'équivalences de E pour la relation $\mathcal{R}$. On a vu qu'il contient la classe $Cl(0) = \{0\}$. Quelles sont les autres classes ? Comme dans le cas $x = 0$, on remarque que si $x < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
Cl(x) &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y\mathcal{R}x\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid ((x < 0 \wedge y < 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0))\ \} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid (x < 0 \wedge y < 0)\} \qquad \text{car } x = 0 \text{ et } x > 0 \text{ sont faux} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y < 0\}.
\end{aligned}$$

De même la classe de $x > 0$ est $Cl(x) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y > 0\}$.
L'ensemble quotient est donc l'ensemble de ces 3 parties de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\mathbb{N}^*, \{0\}, -\mathbb{N}^*\}$, que l'on peut aussi écrire $\{Cl(-1), Cl(0), Cl(1)\}$.