Université Bordeaux 1
Licence de Sciences et Technologies
Fondamentaux pour les Mathématiques et l'Informatique M1MI1002
2011–2012

Devoir surveillé 2

Novembre 2011, Durée 1h, Documents non autorisés

Toutes vos réponses devront être justifiées

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications définies par :

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x \leq 0 \\ 3x+1 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$$g(x, y) = x^2 + xy - x \ .$$

1. Montrer que f est injective mais pas surjective. Est-elle bijective ?
2. Déterminer l'image par g de $(0, 1)$, de $(0, 2)$.
3. Montrer que g n'est pas injective.
4. Soit $y \in \mathbb{N}$. Déterminer l'image de $(1, y)$ par g .
5. L'application g est-elle surjective ?
6. Les expressions $f \circ g$ et $g \circ f$ ont-elles un sens ? Si oui, les expliciter.

Exercice 2

Soit E un ensemble. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E. On définit une relation binaire $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{P}(E)$ par :

$$A \ \mathcal{R}_X \ B \Leftrightarrow (A \cap X \subseteq B \cap X) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_X$ est une relation réflexive et transitive.
2. Soit $E = \mathbb{N}$ et $X = \{1\}$. Montrer que $\mathcal{R}_X$ n'est pas antisymétrique. Est-ce une relation d'ordre ?

Exercice 3

Soit $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, et $\mathcal{R}$ la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ((x < 0 \wedge y < 0) \vee (x = 0 \wedge y = 0) \vee (x > 0 \wedge y > 0)) \ .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0 .
3. Décrire l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.