

Devoir surveillé 1

10 Octobre 2011, Durée 1h
Documents non autorisés

Exercice 1. p et q désignent des propositions logiques.

1. Exprimer sans connecteur \Rightarrow ni \Leftrightarrow la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ (on pourra par exemple s'aider d'une table de vérité).
2. Donner la table de vérité de la proposition $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$.
3. La proposition $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$ est-elle une tautologie (on rappelle qu'une *tautologie* est une proposition qui ne prend que la valeur VRAI)? Justifier la réponse.

Exercice 2. On note $d(x, y)$ la propriété « x est divisible par y » (x et y s'interprétant comme des entiers naturels). On rappelle qu'un entier naturel est *premier* s'il n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même. Écrire sous forme d'une formule avec quantificateurs faisant intervenir la propriété $d(x, y)$, les énoncés suivants :

1. Tout entier naturel est divisible par 1.
2. Tout entier naturel est divisible par lui-même.
3. 2011 est un nombre premier.

Exercice 3.

1. Nier la proposition : “tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans”.
2. Un truand déclare : “Tous les truands sont des menteurs” (c'est-à-dire des individus qui **mentent toujours**). La proposition entre guillemets est-elle alors vraie ou fausse (on pourra faire un raisonnement par l'absurde)?

Exercice 4. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . On pose $X = A \cup (B \setminus C)$ et $Y = (A \cup B) \setminus C$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. A-t-on nécessairement $X \subset Y$? Justifier la réponse.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$.

1. Déterminer l'image directe par f de l'intervalle $[0, 2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par f de l'intervalle $[0, 1]$.