Chapitre 1

Rudiments de logique

1.1 Opérations logiques

Une **proposition logique**, concernant divers objets mathématiques, est un énoncé qui doit être ou bien vrai (ce que l'on note V, ou 1) ou bien faux (ce que l'on note F, ou 0).

Définition 1.1. Les opérations les plus courantes sur ces propositions sont les connecteurs logiques suivants :

1. La négation "**non**", notée $\neg$
2. La disjonction logique "**ou**", notée $\vee$
3. La conjonction logique "**et**", notée $\wedge$
4. L'**implication**, notée $\Rightarrow$
5. L'**équivalence**, notée $\Leftrightarrow$

Ces nouvelles propositions sont définies par leur table de vérité :

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Attention :

- Dans le langage courant, "ou" a en général un sens exclusif (fromage "ou" dessert). En mathématiques, le "ou" est toujours "inclusif" : si p et q sont toutes les deux vraies, $p \vee q$ est vraie.

– Si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est vraie.
Remarque : $p \Rightarrow q$ se dit aussi parfois “si p, alors q”, ou “pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie”, ou encore “une condition suffisante pour q est p”, ou encore “une condition nécessaire pour p est q”.

Définition 1.2. Une **tautologie** est une proposition qui ne prend que la valeur ”vraie”.

Proposition 1.
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ est une tautologie.
- $(\neg(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$ est une tautologie.
- $p \vee (\neg p)$ est une tautologie (**principe du tiers exclu**).
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ est une tautologie.
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ est une tautologie.
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$ est une tautologie (**principe de contraposition**).
- $((r \Rightarrow s) \wedge (s \Rightarrow t)) \Rightarrow (r \Rightarrow t)$ est une tautologie (**principe de transitivité de l’implication**).

D’autres exemples classiques de tautologies (très utiles), concernent la *distributivité* de « $\wedge$ » sur « $\vee$ » (resp. de « $\vee$ » sur « $\wedge$ » :
- $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$.
- $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$.

Remarque importante : dire que « $p \Leftrightarrow q$ » est une tautologie signifie exactement que p et q ont même table de vérité. Dans la pratique, on dit souvent que deux propositions qui ont même table de vérité sont *équivalentes*. Plusieurs des tautologies mentionnées ci-dessus peuvent ainsi être reformulées en utilisant ce langage. Par exemple, « $(p \wedge (q \vee r))$ » est équivalent à « $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ ». De même, « $(p \Rightarrow q)$ » est équivalent à « $((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$ », etc. Dans une formule propositionnelle, on peut remplacer une proposition par une proposition équivalente.

1.2 Notion d’ensemble

Définition 1.3. Un ensemble est une collection d’éléments, donnés dans un ordre indifférent. On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l’ensemble E.
Il existe par convention un ensemble ne contenant aucun élément, c’est l’**ensemble vide** noté $\emptyset$. Un ensemble n’ayant qu’un seul élément est un **singleton**.

1.3 Quantificateurs

Définition 1.4. Soit $p(x)$ une proposition dépendant d’une variable x ; on définit deux nouvelles formules, à l’aide des **quantificateurs** $\forall$ et $\exists$:

1. $\forall x,\ p(x)$: “pour tout x, on a $p(x)$”
2. $\exists x,\ p(x)$: “il existe x, tel que $p(x)$”

La première est vraie lorsqu’on l’interprète dans un ensemble E, si la proposition $p(x)$ est vraie *pour tous* les éléments x de E. La seconde est vraie, s’*il existe (au moins) un* élément x de E pour lequel $p(x)$ est vraie.

On précise en général le domaine d’interprétation E en écrivant “$\forall x \in E, p(x)$”, ou “$\exists x \in E, p(x)$”. Par convention, si E est vide, “$\forall x \in E, p(x)$” est vraie, et “$\exists x \in E, p(x)$” est fausse.

Remarques :

1. Les variables sont muettes : $\forall x,\ p(x)$ et $\forall y,\ p(y)$ désignent la même proposition.
2. La négation de $(\forall x \in E,\ p(x))$ est $(\exists x \in E,\ \neg(p(x)))$. (Attention, le domaine d'interprétation est le même des deux côtés)
3. En général, $(\forall x \in E, \exists y \in E, p(x,y))$ et $(\exists y \in E, \forall x \in E, p(x,y))$ sont deux propositions différentes.
4. Pour montrer que "$\exists x \in E, p(x)$" est vraie, il suffit de trouver un x particulier dans l'ensemble E pour lequel $p(x)$ est vraie. Pour montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est vraie, un tel **exemple** ne suffit pas. Enfin, montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est faux revient à montrer que "$\exists x \in E, \neg p(x)$" est vraie, donc il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire un x pour lequel $p(x)$ est faux.

1.4 Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** est un principe de démonstration fondé sur le principe logique du **tiers exclu**. Ce principe affirme que

$$p \vee \neg(p)$$

est une tautologie.

Principe de la démonstration par l'absurde : Supposons que l'on veuille prouver que la proposition p est vraie. On suppose que $\neg(p)$ est vraie (ou que p est fausse), et l'on exhibe (en utilisant notre système d'axiomes et/ou les règles de déduction logique) une contradiction. On en conclut alors que l'hypothèse faite sur p est fausse, donc que p est vraie.

Exemple 1.1. On admet que tout entier peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Montrons par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers. Supposons que cette proposition est fausse, i.e. il existe un nombre fini de nombres premiers, disons $p_1, \ldots, p_n$. Alors l'entier $p := (p_1 \times \ldots \times p_n + 1)$ n'est divisible par aucun des entiers p_i. Mais ceci constitue une contradiction. La proposition initiale est donc valide.

1.5 Raisonnement par la contraposée

Le **raisonnement par contraposée** est un principe de démonstration qui s'appuie sur le principe logique de **contraposition**. Ce principe peut s'écrire de la manière suivante :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

et s'énoncer ainsi :

Principe : Soient p et q deux propositions. Supposons que l'on veuille prouver que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie. Le principe de contraposition assure qu'il est équivalent de démontrer que la proposition $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$, que l'on appelle la **contraposée** de $p \Rightarrow q$.
Attention : Ne pas confondre la contraposée de $p \Rightarrow q$, qui est $\neg q \Rightarrow \neg p$, avec sa **réciproque** "$q \Rightarrow p$". La contraposée est équivalente à la proposition de départ, la réciproque ne l'est en général pas.

Exemple 1.2. Nous allons montrer par la contraposée que si les entiers x et y sont différents, alors les entiers $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents. La contraposée de cette implication dit que si les entiers $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont égaux, alors les entiers x et y sont égaux. Supposons donc que les entiers $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont égaux, c'est-à-dire $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. En développant, on obtient $xy + y - x - 1 = xy - y + x - 1$, d'où $x = y$.