Normes infinies des fonctions propres de surfaces arithmétiques

Guillaume Ricotta

14 novembre 2003

Table des matières

Introduction

L'article d'Iwaniec et de Sarnak est motivé par un problème étudié par les physiciens théoriques : le chaos quantique. Il s'agit, entre autres, d'étudier les vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami agissant sur les fonctions sur une variété Riemannienne compacte. Il est notamment intéressant de connaître le comportement de la norme infinie des vecteurs propres de carré intégrable de l'opérateur de Laplace-Beltrami par rapport à leur valeur propre. Restreignons déjà le cadre dans lequel on va travailler. On considère une surface de Riemann compacte X. L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ, dont la définition est purement géométrique, agit sur les fonctions sur X. Si Φ est un vecteur propre de l'opérateur Δ associé à la valeur propre λ alors on peut montrer que :

$$||\Phi||_\infty \ll \lambda^{\frac{1}{4}}||\Phi||_2. \tag{1}$$

Cette borne dite borne de convexité est optimale dans le sens où elle est effectivement atteinte si X est la sphère S^2. Cet article présente dans un premier temps une amélioration de cette borne dans le cas de surfaces arithmétiques du type $X = \Gamma \setminus \mathbf{H}^2$ où Γ est successivement le groupe des unités propres d'une algèbre de quaternions de division indéfinie sur $\mathbf{Q}$ puis $SL_2(\mathbf{Z})$. Plus précisément, on va établir que pour certains vecteurs propres Φ :

$$\forall\epsilon > 0,\ ||\Phi||_\infty \ll \lambda^{\frac{5}{24}+\epsilon}||\Phi||_2. \tag{2}$$

Je renvoie pour un énoncé exact de ce résultat 2 au théorème B. La preuve de 2 repose essentiellement sur un résultat noté théorème A.
Les résultats algébriques relatifs aux algèbres de quaternions seront évoqués au cours du premier chapitre. Dans le cas de surfaces arithmétiques , l'opérateur de Laplace-Beltrami écrit en coordonnées locales n'est autre que l'opérateur de Laplace hyperbolique Δ agissant sur les fonctions sur le demi-plan de Poincaré. L'un des intérêts de ces surfaces dites arithmétiques réside dans le fait que l'on peut construire "beaucoup" d'opérateurs linéaires dits de Hecke qui agissent sur les fonctions sur X, sont hermitiens et commutent avec l'opérateur de Laplace hyperbolique. Les propriétés de ces opérateurs vis-à-vis de la composition permettront de rendre linéaire un problème quadratique et on essaiera d'insister sur ce rôle joué par ces opérateurs de Hecke dans les estimations à venir. Ces opérateurs de Hecke agiront sur des sortes de moyennes spectrales qui sont des décompositions spectrales de noyaux automorphes qui découlent de la théorie spectrale des noyaux automorphes. Cette théorie spectrale sera rappelée dans le second chapitre. On essaiera aussi de mettre en valeur la différence fondamentale entre les deux cas évoqués à savoir l'existence ou non d'un domaine fondamental compact pour l'action de Γ sur $\mathbf{H}^2$ et d'expliquer comment on y remédie dans le cas de $SL_2(\mathbf{Z})$.
Dans leur article, Iwaniec et Sarnak donnent aussi des bornes inférieures aux

normes infinies de certains vecteurs propres du Laplacien hyperbolique. Leur résultat final asserte que pour une infinité de vecteurs propres Φ et pour un ensemble arithmétique dense de z dans le demi-plan de Poincaré, on a :

$$|\Phi(z)| \geq \sqrt{\ln(\ln \lambda)}. \tag{3}$$

Je renvoie pour un énoncé exact de ce résultat 3 au théorème D. La preuve de 3 repose essentiellement sur un résultat noté théorème C. Ce résultat 3 coincide avec le modèle d'ondes de le physique quantique et est une manifestation du chaos quantique.

Je tiens à remercier vivement mes parents qui m'ont soutenu pendant toutes mes longues études et qui ont été présent aux moments importants. Je remercie mon directeur de DEA, Monsieur Philippe Michel, pour sa disponibilité, ses conseils éclairés et pour m'avoir conseillé et convaincu en ce qui concerne mes projets futurs. Je n'oublie pas Monsieur H.Attouch pour nos multiples discussions. Un grand merci à Madame P.Arnaud, secrétaire du DEA de Mathématiques de l'Université de Montpellier 2, et C.Desecures, secrétaire du Département Mathématiques et Informatique de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon pour tout leur travail administratif.

Je dédie ce texte à Nicolas Savardel, alias SouSou, qui nous a quitté beaucoup trop vite mais que je n'oublie pas.

Chapitre 1

Algèbres de quaternions

1.1 Introduction

Les objectifs principaux sont de définir un des deux cadres dans lesquels on va travailler dans le corps de ce rapport à savoir les algèbres de quaternions et de construire des opérateurs dits de Hecke qui joueront un rôle fondamental ensuite.

1.2 Premières définitions

Une *algèbre de quaternions* $\mathcal{A}$ sur un corps quelconque $\mathbf{K}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre engendrée par $(1,\omega,\Omega,\omega\Omega)$ où :

- $\omega^2 = a \in \mathbf{K}$
- $\Omega^2 = b \in \mathbf{K}$
- $\omega\Omega = -\Omega\omega$.

Ainsi, tout élément α de $\mathcal{A}$ s'écrit de manière unique comme :

$$\alpha = a_0 + a_1\omega + a_2\Omega + a_3\omega\Omega.$$

Le *conjugué* de α est :

$$\overline{\alpha} = a_0 - a_1\omega - a_2\Omega - a_3\omega\Omega.$$

La *trace* de α est :

$$Tr(\alpha) = 2a_0 = \alpha + \overline{\alpha}.$$

La *norme* de α est :

$$N(\alpha) = a_0^2 - aa_1^2 - ba_2^2 + aba_3^2 = \alpha\overline{\alpha}.$$

1.3 Premiers caractéristiques et classification

1.3.1 Le symbole de Hilbert

Il s'agit de rappeler quelques résultats sur le symbole de Hilbert utiles pour la suite. Notons $(\, , \,)_p$ le symbole de Hilbert dans $\mathbf{Q_p}$ pour tout nombre premier

p c'est-à-dire :

$$(u,v)_p = \begin{cases} +1 & \text{si } ux^2+vy^2-z^2=0 \text{ a une solution non triviale dans } \mathbf{Q_p^3} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dispose de règles rendant le calcul du symbole de Hilbert élémentaire dans les cas qui nous intéressent :

$$(u,v)_p = \begin{cases} +1 & \text{si p} \neq 2 \text{ ne divise ni } u \text{ ni } v \\ \left(\frac{a}{p}\right) & \text{si p} \neq 2 \text{ ne divise pas } u \text{ et divise strictement } v \\ +1 & \text{si} \, p=\infty \, \text{et} \, u>0 \, \text{et} \, v>0. \end{cases}$$

La loi de réciprocité pour le symbole de Hilbert s'écrit :

$$(u,v)_2 = \prod_{p\neq 2} (u,v)_p$$

1.3.2 Classification des algèbres de quaternions

Pour tout nombre premier p, on note $\mathcal{A}_p$ le produit tensoriel sur $\mathbf{Q}$ de $\mathcal{A}$ et de $\mathbf{Q_p}$ et on peut vérifier qu'il s'agit d'une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q_p}$. On dit que $\mathcal{A}$ se ramifie en p ou que p se ramifie dans $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}_p$ est un corps ce qui est équivalent de dire que $\mathcal{A}_p$ n'est pas isomorphe à $M_2(\mathbf{Q_p})$. Un tel nombre premier p est appelé *premier caractéristique.* On généralise naturellement tout ce qui précède en l'infini. On peut montrer qu'il existe un nombre fini de premiers caractéristiques et il s'agit alors de donner une méthode plus ou moins pratique de les déterminer. Celle-ci est fournie par le symbole de Hilbert car on peut montrer que p se ramifie dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $(a,b)_p = -1$.
Dans toute la suite de ce rapport, on suppose que :

1. *a et b sont des entiers relatifs quadratfrei*
2. $a > 0$
3. *$\mathcal{A}$ est une algèbre de division.*

$\mathcal{A}$ est alors une algèbre de quaternions de division indéfinie. Remarquons pour commencer que l'on peut plonger $\mathcal{A}|\mathbf{Q}$ dans $M_2(\mathbf{F})$ où $\mathbf{F}=\mathbf{Q}(\sqrt{a})$. Il suffit de considérer l'application ϕ suivante :

$$\phi(a_0+a_1\omega+a_2\Omega+a_3\omega\Omega) = \begin{pmatrix} a_0+a_1\sqrt{a} & a_2+a_3\sqrt{a} \\ b(a_2-a_3\sqrt{a}) & a_0-a_1\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

Dans ce cadre, la détermination des premiers caractéristiques est effective. Par exemple, $\mathcal{A}$ n'est pas ramifiée à l'infini. Dans toute la suite de ce rapport, *q est le produit des premiers caractéristiques.*

1.4 Ordres et idéaux

1.4.1 Ordres et ordres maximaux

Un *ordre* $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{A}$ vérifiant :

1. $1 \in \mathcal{I}$

2. $\alpha \in \mathcal{I} \Rightarrow (Tr(\alpha), N(\alpha)) \in \mathbf{Z}^2$
3. $\mathcal{I}$ admet une partie génératrice finie à quatre éléments sur $\mathbf{Q}$.

On peut montrer qu'un ordre de $\mathcal{A}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de rang quatre et que tout ordre de $\mathcal{A}$ est contenu dans un ordre maximal au sens de l'inclusion. On définit de même la notion d'ordre et d'ordre maximal de $\mathcal{A}_p$ sur $\mathbf{Q_p}$ en substituant à $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers p-adiques noté $\mathcal{O}_p$ et on peut faire le lien entre ces deux notions. Si $\mathcal{I}$ est un ordre de $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{Z}$-base $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ alors on pose, pour tout premier p, $\mathcal{I}_p = \mathcal{O}_p\,\mu_1 + \mathcal{O}_p\,\mu_2 + \mathcal{O}_p\,\mu_3 + \mathcal{O}_p\,\mu_4$ qui est alors un ordre de $\mathcal{A}_p$ sur $\mathbf{Q_p}$. De plus, on a :

$$I = \mathcal{A} \cap \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{I}_p\,.$$

Ainsi, il est alors facile de vérifier que $\mathcal{I}$ est un ordre maximal de $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{Q}$ équivaut à dire que $\mathcal{I}_p$ est un ordre maximal de $\mathcal{A}_p$ sur $\mathbf{Q_p}$ pour tout premier p. Etudier globalement les ordres maximaux d'une algèbre de quaternions consiste donc à les étudier localement. La fin de cette partie est destinée à présenter ce que l'on sait sur les ordres maximaux locaux. Bien entendu, les ordres maximaux diffèrent profondément suivant que $\mathcal{A}_p$ est une algèbre de division ou est isomorphe à $M_2(\mathbf{Q_p})$.

Théorème 1.1 (Ordres maximaux locaux) *Si $\mathcal{A}_p|\mathbf{Q_p}$ est une algèbre de division alors il existe dans $\mathcal{A}_p$ un unique ordre maximal qui est :*

$$\mathcal{I}_p = \{\nu \in \mathcal{A}_p\,,\ N(\nu) \in \mathcal{O}_p\}\,.$$

Théorème 1.2 (Ordres maximaux locaux bis) *Si $\mathcal{A}_p|\mathbf{Q_p}$ est isomorphe à $M_2(\mathbf{Q_p})$ alors les ordres maximaux de $\mathcal{A}_p$ sont exactement les $\mu^{-1}\,\mathcal{I}_p\,\mu$ où :*

1. *μ est dans $\mathcal{A}_p$ de norme non nulle*
2. *$\mathcal{I}_p$ est isomorphe à $M_2(\mathcal{O}_p)$.*

1.4.2 Idéaux locaux d'un ordre donné

Un *idéal à gauche* de l'ordre $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{A}_p|\mathbf{Q_p}$ est un $\mathcal{O}_p$-module $\mathcal{M}$ tel que :

$$\mathcal{M} = \mathcal{I}\mu \text{ où } \mu \text{ est dans } \mathbf{Q_p} \text{ de norme non nulle.}$$

On remarque que $\mathcal{M}$ s'écrit aussi $\mathcal{M} = \mu\mathcal{I}'$ où $\mathcal{I}' = \mu^{-1}\mathcal{I}\mu$. On définit de même la notion d'idéal à droite d'un ordre donné. On dit que $\mathcal{I}$ est l'ordre à gauche de $\mathcal{M}$ noté $\mathcal{I}_g(\mathcal{M})$ et $\mathcal{I}'$ est l'ordre à droite de $\mathcal{M}$ noté $\mathcal{I}_d(\mathcal{M})$. Un idéal $\mathcal{M}$ est dit *entier* si $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_g(\mathcal{M})$ ce qui équivaut de dire que $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}_d(\mathcal{M})$. Enfin, la *norme* d'un idéal $\mathcal{M} = \mathcal{I}\mu$ est l'idéal principal de $\mathcal{O}_p$ engendré par $N(\mu)$. On dispose maintenant de tout le formalisme nécessaire pour classifier les idéaux à gauche entiers locaux de norme p^n d'un ordre maximal donné et cette classification diffèrera selon la nature de $\mathcal{A}_p|\mathbf{Q_p}$.

Théorème 1.3 (Idéaux à gauche entiers locaux de norme p^n) *Si $\mathcal{A}_p|\mathbf{Q_p}$ est une algèbre de division d'unique ordre maximal $\mathcal{I}_p = \{\nu \in \mathcal{A}_p\,,\ N(\nu) \in \mathcal{O}_p\}$ alors :*

1. *$\mathcal{I}_p\,\pi$ est l'unique idéal à gauche entier de norme (p) de $\mathcal{I}_p$*
2. *$\mathcal{I}_p\,\pi^n$ est l'unique idéal à gauche entier de norme (p^n) de $\mathcal{I}_p$*

où π dans $\mathcal{I}_p$ vérifie $\pi^2 = \sqrt{p}$.

Théorème 1.4 (Idéaux à gauche entiers locaux de norme p^n bis) *Si $\mathcal{A}_p|\mathbf{Q_p}$ est isomorphe à $M_2(\mathbf{Q_p})$ alors l'ensemble des idéaux à gauche entiers deux à deux distincts de norme (p^n) de $\mathcal{I}_p$ isomorphe à $M_2(\mathcal{O}_p)$ est $\mathcal{I}_p\,\mu$ où :*

$$\mu \simeq \begin{pmatrix} p^{n_1} & m'_{1,2} \\ 0 & p^{n_2} \end{pmatrix}$$

où $n_1 + n_2 = n$ et $0 \leq m'_{1,2} < p^{n_2}$.

Corollaire 1.5 *Le nombre d'idéaux à gauche entiers de norme (p^r) de $\mathcal{I}_p$ est fini et égal à :*

$$a^{(p)}_{p^r} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est un premier caractéristique} \\ \frac{1-p^{r+1}}{1-p} & \text{sinon} \end{cases}$$

1.4.3 Idéaux globaux d'un ordre donné

Un *idéal à gauche* de l'ordre $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}|\mathbf{Q}$ est :

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{I}_p\,\mu_p \text{ où } \mathcal{I}_p\,\mu_p = \mathcal{I}_p \text{ pour presque tout } p.$$

On peut montrer que :

1. $\mathcal{M}$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini
2. $\mathcal{M}_p = \mathcal{I}_p\,\mu_p$ où $\mathcal{M}_p$ est le $\mathcal{O}_p$-module de même bas que $\mathcal{M}$ sur $\mathbf{Z}$
3. $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{M}_p$

L'ordre à gauche de $\mathcal{M}$ est $\mathcal{I}_g(\mathcal{M}) = \mathcal{A} \cap \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{I}_p$ et vérifie $\mathcal{I}\mathcal{M} = \mathcal{M}$. L'ordre à droite de $\mathcal{M}$ est $\mathcal{I}_d(\mathcal{M}) = \mathcal{A} \cap \bigcap_{p\in\mathcal{P}} \mu_p^{-1}\mathcal{I}_p\mu_p$. La norme de $\mathcal{M}$ est l'idéal principal de $\mathbf{Z}$ engendré par :

$$\prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i} \quad \text{où}$$

1. $\mathcal{I}_{p_i}\,\mu_i \neq \mathcal{I}_{p_i}$
2. $N(\mu_{p_i}) = p_i^{n_i}\,u_{p_i}$ où u_{p_i} est inversible dans $\mathcal{O}_{p_i}$.

Fixons pour toute la suite de ce rapport *un ordre maximal $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}|\mathbf{Q}$*. Ce qui précède et les résultats du pargraphe précédent assurent que $\mathcal{R}$ admet un nombre fini a_n d'idéaux à gauche entiers de norme $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i}$. On a alors :

$$a_n = \prod_{i=1}^{k} a_{p_i^{r_i}}.$$

On peut aussi montrer que tout idéal à gauche est principal. Regroupons ces résultats successifs sous le théorème suivant :

Théorème 1.6 (Idéaux à gauche entier de norme p^n d'un ordre maximal donné) *Les idéaux à gauche entier de norme p^n d'un ordre maximal $\mathcal{R}$ donné sont de la forme $\mathcal{I}\,\mu_{n_1,n_2}$ où :*

$$\mu_{n_1,n_2} \simeq \begin{pmatrix} p^{n_1} & m'_{1,2} \\ 0 & p^{n_2} \end{pmatrix}$$

où $n_1 + n_2 = n$ et $0 \leq m'_{1,2} < p^{n_2}$.

1.5 Unités d'une algèbre de quaternions

Soit $\mathcal{I}$ un ordre de $\mathcal{A}|\mathbf{Q}$. On note $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ le *groupe des unités propres de* $\mathcal{I}$ c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{A}$ de norme 1. Posons $\Gamma_{\mathcal{I}} = \phi(\mathcal{A}_{\mathcal{I}})$ c'est-à-dire les matrices de $M_2(\mathbf{F})$ de déterminant 1. On écrira ξ ou $\phi(\xi)$ selon le contexte. $\Gamma_{\mathcal{I}}$ agit par homographie sur le demi-plan de Poincaré. Il s'agit alors d'étudier le quotient $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ pour cette action.

Théorème 1.7 (Compacité de $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$) *$\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ admet une structure de surface de Riemann compacte. Autrement dit, $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ admet un domaine fondamental noté $\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{I}})$ inclus strictement dans le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}^2$.*

Ce théorème est très important dans la mesure où il permettra de rendre uniforme des estimations et on verra que cela ne sera pas du tout le cas pour $SL_2(\mathbf{Z})$ qui demandera un argument supplémentaire.

1.6 Opérateurs de Hecke sur la surface $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$

On arrive maintenant au but principal de ce chapitre à savoir la construction d'opérateurs linéaires sur ces surfaces. L'intérêt majeur de ces opérateurs sera de ramener des estimations de quantités quadratiques à des estimations de quantités linéaires ce qui permettra d'améliorer les bornes existantes. Pour construire ces opérateurs, on va dans un premier temps construire des objets purement topologiques sur ces surfaces de Riemann appelés correspondances modulaires puis en donner une interprétation algébrique en terme d'idéaux primitifs...

1.6.1 Notions générales sur les correspondances entre surfaces de Riemann

Dans ce paragraphe, on fixe X et X' deux surfaces de Riemann. Une *correspondance* de X dans X' est un morphisme du groupe des diviseurs de X noté $Div(X)$ dans celui de X'. L'ensemble des correspondances de X dans X forme un anneau pour les lois usuelles. Donnons une construction systématique de correspondances de X. Fixons X'' un revêtement de X (resp. X') à d' (resp. d) feuilles et notons π_1 et π_2 les projections de revêtement correspondantes. On définit alors une correspondance C de X dans X' par :

$$C(P) = P'_1 + \ldots + P'_d \qquad \text{si} \quad \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(P) = \{P'_1, \ldots, P'_d\}$$

Supposons maintenant qu'il existe un homéomorphisme ν de X' dans X. On sera toujours dans cette situation dans la suite de ce rapport. A une telle correspondance C de X dans X' on associe une correspondance C^ν de X dans X par :

$$C^\nu(P) = \nu(P'_1) + \ldots + \nu(P'_d) \qquad \text{si} \quad \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(P) = \{P'_1, \ldots, P'_d\}$$

1.6.2 Correspondances modulaires

Appliquons ce qui précède aux surfaces de Riemann obtenues à partir d'algèbres de quaternions. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ deux ordres de $\mathcal{A}|\mathbf{Q}$. On peut montrer que

$\mathcal{A}_{\mathcal{I}} \cap \mathcal{A}_{\mathcal{I}'}$ est d'indice fini d' (resp. d) dans $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{A}_{\mathcal{I}'}$) donc $\Gamma_{\mathcal{I}} \cap \Gamma_{\mathcal{I}'}$ l'est aussi dans $\Gamma_{\mathcal{I}}$ et dans $\Gamma_{\mathcal{I}'}$. On pose :

$$\mathcal{S}_{\Gamma_{\mathcal{I}} \cap \Gamma_{\mathcal{I}'}} = \left\{\Gamma_{\mathcal{I}} \cap \Gamma_{\mathcal{I}'}.z,\, z \in \mathbf{H^2}\right\}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{I}} &= \coprod_{i=1}^{d'} (\Gamma_{\mathcal{I}} \cap \Gamma_{\mathcal{I}'})\,\epsilon_i \text{ où } \epsilon_i \in \Gamma_{\mathcal{I}}. \\ \Gamma_{\mathcal{I}'} &= \coprod_{i=1}^{d} (\Gamma_{\mathcal{I}} \cap \Gamma_{\mathcal{I}'})\,\epsilon'_i \text{ où } \epsilon'_i \in \Gamma_{\mathcal{I}'}. \end{aligned}$$

$\mathcal{S}_{\Gamma_{\mathcal{I}} \cap \Gamma_{\mathcal{I}'}}$ est un revêtement de $\mathcal{S}_{\Gamma_{\mathcal{I}}}$ et de $\mathcal{S}_{\Gamma_{\mathcal{I}'}}$ à d' et d feuilles. On définit une correspondance $C_{\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}'}}$ par :

$$C_{\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}'}}(\Gamma_I.z) = \sum_{i=1}^{d'} \Gamma_{\mathcal{I}'}.(\epsilon_i.z).$$

Supposons dans toute la suite que $\mathcal{I}' = \nu^{-1}\,\Gamma_{\mathcal{I}}\,\nu$. On a alors $\Gamma_{\mathcal{I}'} = \nu^{-1}\,\Gamma_{\mathcal{I}}\,\nu$ et l'application ψ suivante est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ dans $\mathcal{S}_{\mathcal{I}'}$:

$$\psi(\Gamma_{\mathcal{I}}.z) = \Gamma_{\mathcal{I}'}.(\nu^{-1}.z).$$

On note pour simplifier $C^{\psi}_{\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{I}'}} = C_\nu$ d'où avec ces notations :

$$C_\nu(\Gamma_{\mathcal{I}}.z) = \sum_{i=1}^{d'} \psi^{-1}(\Gamma_{\mathcal{I}'}(\epsilon_i.z)) = \sum_{i=1}^{d'} \Gamma_{\mathcal{I}}(\nu\epsilon_i.z).$$

Donnons un aspect algébrique à ces objets purement topologiques que sont les correspondances. On dit que ν dans $\mathcal{I}$ est *primitif* si il n'existe pas de rationnel $t > 1$ tel que $\frac{\nu}{t} \in \mathcal{I}$. Dans la suite de ce rapport, $\mathcal{I} = \mathcal{R}$ est un ordre maximal de $\mathcal{A}$.

Théorème 1.8 (Topologie vers algèbre) *Si n est un entier naturel ne divisant pas q et ν est dans $\mathcal{R}$ primitif de norme n alors tous les idéaux primitifs à gauche de norme n de $\mathcal{R}$ sont de la forme $\mathcal{R}\,\nu\,\epsilon_i$ pour $1 \leq i \leq d'$.*

La conséquence remarquable de ce lemme est que pour ϵ dans $\Gamma_{\mathcal{R}}$, on a :

$$\forall i \in \{1,\ldots,d'\},\ \exists j \in \{1,\ldots,d'\}\ \Gamma_{\mathcal{R}}\,\nu\epsilon_i\epsilon = \Gamma_{\mathcal{R}}\,\nu\epsilon_j.$$

Ainsi, C_ν peut être interprété comme un opérateur sur $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ par :

$$C_\nu(\Gamma_{\mathcal{R}}.z) = \sum_{i=1}^{d'} \Gamma_{\mathcal{R}}(\nu\epsilon_i.(\Gamma_{\mathcal{R}}.z)).$$

C_ν est une *correspondance modulaire primitive*. On dispose d'une écriture plus élégante pour celle-ci :

$$C_\nu = \sum_{i=1}^{d'} \Gamma_{\mathcal{R}}.\nu_i \quad \text{où } \mathcal{R}\nu_i \text{ décrit les iféaux primitifs entiers à gauche de norme } n \text{ de } \mathcal{R}.$$

Ainsi, C_ν ne dépend que de n et est noté C_n dorénavent. Par extension, on définit la *correspondance modulaire* D_n pour n premier avec q par :

$$D_n = \sum_i \Gamma_{\mathcal{R}}\, \mu_i \text{ où } \mathcal{R}\mu_i \text{ décrit les idéaux à gauche entiers de norme } n \text{ de } \mathcal{R}.$$

Proposition 1.9 (Correspondance modulaire versus modulaire primitive) *Si n est premier avec q alors :*

$$D_n = \sum_{t^2 | n} C_{\frac{n}{t^2}}.$$

On cherche à obtenir l'expression la plus simple possible pour les correspondances modulaires. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$\mathcal{R}(n) = \{\phi(\alpha)\,, \alpha \in \mathcal{R},\, N(\alpha) = n\}\,.$$

$\mathcal{R}(n)$ est donc constitué de matrices de déterminant n. $\mathcal{R}(1) = \Gamma_{\mathcal{R}}$ agit par multiplication à gauche sur $\mathcal{R}(n)$. On dispose d'une bijection de $\mathcal{R}(1) \setminus \mathcal{R}(n)$ avec l'ensemble des idéaux à gauche entiers de norme n de $\mathcal{R}$ par :

$$\mathcal{R}(1)\phi(\alpha) \longrightarrow \mathcal{R}\,\alpha.$$

Théorème 1.10 (Correspondance modulaire :forme finale) *Si $n \wedge q = 1$ alors :*

$$D_n = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(1)\setminus\mathcal{R}(n)} \Gamma_{\mathcal{R}}\, \alpha.$$

La propriété principale des correspondances modulaires est la suivante :

Théorème 1.11 (Correspondance modulaire et composition) *Pour m et n premiers avec q, on a :*

$$D_n \circ D_m = \sum_{d | m \wedge n} d D_{\frac{nm}{d^2}}$$

1.6.3 Opérateurs de Hecke

On note $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2)$ l'espace des fonctions automorphes relativement à $\Gamma_{\mathcal{R}}$ de poids 0 de carré intégrable c'est-à-dire :

$$L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2) = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbf{H}^2, \mathbf{C}),\, \forall \gamma \in \Gamma_{\mathcal{R}},\, f|_\gamma = f \text{ et } ||f||_{\Gamma_{\mathcal{R}}} < \infty \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire de Petterson de poids 0 relatif à $\Gamma_{\mathcal{R}}$ noté $(,)_{\Gamma_{\mathcal{R}}}$ ce qui en fait un espace de Hilbert complexe. On cherche à définir à partir des correspondances modulaires des opérateurs linéaires sur cet espace de Hilbert. Si n est premier avec q alors on rappelle que la n^{eme} correspondance modulaire est :

$$D_n = \sum_i \Gamma_{\mathcal{R}} \nu_i \text{ où } \mathcal{R}\nu_i \text{ décrit l'ensemble des idéaux à gauche de norme } n \text{ entiers de } \mathcal{R}.$$

On associe l'opérateur de Hecke T_n par :

$$T_n(f)(z) = \sum_i f(\phi(\nu_i.z)) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(1)\setminus\mathcal{R}(n)} f(\alpha.z).$$

On peut aussi définir des opérateurs de Hecke T_n pour un entier n non premier avec q mais cela ne servira pas pour la suite. Les propriétés des correspondances modulaires se transposent sur les opérateurs de Hecke.

Théorème 1.12 (Opérateurs de Hecke et composition) *Pour m et n premiers avec q, on a :*

$$T_n \circ T_m = \sum_{d \,|m \wedge n} dT_{\frac{nm}{d^2}}$$

Ainsi, l'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke est commutative et engendrée par les T_p pour p premier. Montrons maintenant que les opérateurs de Hecke sont auto-adjoints pour le produit scalaire de Petterson.

Théorème 1.13 (Les opérateurs de Hecke sont autoadjoints) *Si $n \wedge q = 1$ alors $T_n = T_n^*$.*

Ces théorèmes 1.12 et 1.13 sont très importants en vue de l'étude spectrale de ces opérateurs. Selon ce qui précède, il suffit de montrer que les opérateurs T_p pour p ne divisant pas q sont hermitiens. Rappelons que la correspondance modulaire D_p définissant l'opérateur de Hecke T_p est défini par $D_p = \sum_{i=1}^{p+1} \Gamma_{\mathcal{R}} \nu_i$ où $\mathcal{R}\nu_i$ décrit l'ensemble des idéaux à gauche entiers de norme p de $\mathcal{R}$ dont la forme normale est :

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} p^{n_1} & m_{1,2} \\ 0 & p^{n_2} \end{pmatrix} \text{ où } n_1 + n_2 = 1 \text{ et } 0 \leq m_{1,2} \leq p^{n_2}.$$

On pose :

$$\Gamma(p) = \{M \in M_2((Z)) \cap \Gamma_{\mathcal{R}}, M \equiv 1_2[p]\}.$$

$\Gamma(p)$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_{\mathcal{R}}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p+1\}, \, \nu_i \Gamma(p) \nu_i^{-1} \subset \Gamma_{\mathcal{R}}.$$

L'intérêt d'un tel sous-groupe $\Gamma(p)$ est de pouvoir définir un produit scalaire absolu grâce à la propriété suivante :

$$\forall i \in \{1, \ldots, p+1\}, \forall f \in L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2), \, f|_{\nu_i} \in L^2(\Gamma(p) \setminus \mathbf{H}^2). \tag{1.1}$$

Proposition 1.14 (Définition du produit scalaire absolu indépendamment du groupe choisi)
HYPOTHÈSES

1. *i et j dans $\{1, \ldots, p+1\}$*
2. *Γ un sous-groupe d'indice fini de $\Gamma_{\mathcal{R}}$ vérifiant 1.1*
3. *f, g dans $L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2)$*

CONCLUSION
$< f|_{\nu_i}, g|_{\nu_j} >_a = \frac{1}{[\Gamma:\Gamma_{\mathcal{R}}]}(f|_{\nu_i}, g|_{\nu_j})_\Gamma$ *est indépendant du sous-groupe auxiliaire Γ choisi.*

Proposition 1.15 *Pour $i \in \{1, \ldots, p+1\}$ et pour $(f, g) \in (L^2(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2))^2$, on a :*

$$< f|_{\nu_i}, g|_{\nu_j} >_a = < f, g >_a = (f, g)_{\Gamma_{\mathcal{R}}}.$$

Proposition 1.16 *Si p est un premier non caractéristique alors $T_p = T_p^*$.*

PREUVE :

$$(T_p(f),g)_{\Gamma_{\mathcal{R}}} = \sum_{i=1}^{p+1} < f|_{\nu_i}, g >_a = \sum_{i=1}^{p+1} < f, g|_{\nu_i^{-1}} >_a .$$

Or, comme $\nu_i \overline{\nu_i} = p$ et selon la proposition 1.15, on a :

$$(T_p(f),g)_{\Gamma_{\mathcal{R}}} = \sum_{i=1}^{p+1} < f, g|_{\frac{1}{p}\overline{\nu_i}} >_a .$$

Comme l'action par une matrice scalaire est triviale, il vient que :

$$(T_p(f),g)_{\Gamma_{\mathcal{R}}} = < f, \sum_{i=1}^{p+1} g|_{\overline{\nu_i}} >_a .$$

Quand $\mathcal{R}\nu_i$ décrit les idéaux à gauche entiers de norme p de $\mathcal{R}$ alors $\mathcal{R}\overline{\nu_i}$ décrit le même ensemble donc :

$$(T_p(f),g)_{\Gamma_{\mathcal{R}}} = (f, T_p(g))_{\Gamma_{\mathcal{R}}} \bullet$$

Chapitre 2

Théorie spectrale du Laplacien hyperbolique

2.1 Introduction

Il s'agit dans ce chapitre de faire rapidement la théorie spectrale de l'opérateur Laplacien hyperbolique et donner le deuxième outil important pour le corps de ce rapport à savoir la décomposition spectrale d'un noyau automorphe. Cette décomposition est une sorte de moyenne spectrale sur laquelle va pouvoir agir des opérateurs de Hecke.

2.2 Définition du Laplacien hyperbolique

L'opérateur de Laplace Δ sur $\mathbf{H}^2$ est l'opérateur différentiel déduit de la métrique hyperbolique $\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{y^2}$ défini par :

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^2}\right)$$

On vérifie par un calcul direct que Δ est invariant sous l'action de poids 0 de $GL_2^+(\mathbf{R})$.

Proposition 2.1

$$\forall f \in C^\infty(\mathbf{H}^2)\,,\, \forall \gamma \in GL_2^+(\mathbf{R})\,,\, \Delta(f|_\gamma) = (\Delta f)|_\gamma.$$

Tout opérateur différentiel sur $\mathbf{H}^2$ invariant sous l'action de poids 0 de $SL_2(\mathbf{R})$ est un pôlynome en Δ ce qui justifie une étude approfondie de Δ. Dans toute la suite de ce chapitre, Γ est un sous-groupe de volume fini de $SL_2(\mathbf{R})$ qui peut admettre des pointes. L'ensemble de ces pointes est noté $Cusp(\Gamma)$. Dans la suite de ce rapport, on prendra successivement $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{R}}$ puis $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$.

2.3 Transformation de Selberg/Harisch-Chandra

2.3.1 Définitions et résultats techniques

Une fonction *invariante par rapport au couple* est $k : (\mathbf{H}^2)^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant :

$$\forall g \in SL_2(\mathbf{R})\,,\ \forall (z,w) \in \mathbf{H}^2\,,\ k(g.z, g.w) = k(z,w).$$

Ainsi, $k(z,w)$ ne dépend que de la distance hyperbolique $\rho(z,w) = \coth\left(1 + \frac{|z-w|^2}{2\Im z \Im w}\right)$ entre z et w. On peut donc poser :

$$k(z,w) = k(u(z,w)) \qquad \text{où}$$

1. $k : \mathbf{H}^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$
2. $u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{Im(z)Im(w)}$

On suppose pour le moment que :

(2.1) $\qquad$ k est une fonction lisse à support compact.

On définit la transformée de Selberg/Harisch-Chandra (SHC en abrégé) h de k en trois étapes :

1. $$q(v) = \int_v^{+\infty} \frac{k(u)}{\sqrt{u-v}} \mathrm{d}u \,\text{pour } u \geq 0$$
2. $$g(r) = 2q((\sinh(\frac{r}{2}))^2) \text{ pour } r \in \mathbf{R}$$
3. $$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(irt) g(r) \mathrm{d}r \text{ pour } t \in \mathbf{R}$$

Donnons quelques résultats techniques qui interviendront dans de nombreuses majorations dans la suite.

Proposition 2.2 *Les fonctions k,q,g,h vérifient :*

1. *q est lisse à support compact dans $\mathbf{R}_+$.*
2. *g est paire, lisse à support compact dans $\mathbf{R}$.*
3. *h est paire, lisse et vérifie $h(r) = \mathcal{O}(r^{-2})$.*
4. $$k(t) = \frac{-1}{\pi} \int_t^{+\infty} \frac{q'(w)}{\sqrt{w-t}} \mathrm{d}w.$$

La théorie de Fourier assure que l'on peut retrouver g à partir de h par :

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \exp(-iru) \mathrm{d}r.$$

En fait, on peut encore mieux contrôler le comportement de h en $+\infty$:

Proposition 2.3 (Comportement de la transformé de (SHC) en l'infini)

$$h(r) = \mathcal{O}(r^{\frac{-5}{2}}).$$

Enfin, on aura besoin d'une expression explicite de k en 0 :

Proposition 2.4 (Expression explicite du noyau k en 0)

$$k(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r h(r) \tanh(\pi r) \mathrm{d}r.$$

Remarquons que, sous l'hypothèse 2.1, on peut reconstruire le noyau k à partir de la transformée h :

1. $$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-irt) h(t) \mathrm{d}t.$$

2. $$q(v) = \frac{1}{2} g(2 \ln(\sqrt{v+1} + \sqrt{v})).$$

3. $$k(u) = \frac{-1}{\pi} \int_{u}^{+\infty} \frac{q'(v)}{\sqrt{v-u}} \mathrm{d}v.$$

Ce qui précède est en fait valable par approximation et régularisation pour une classe plus grande de noyaux à savoir ceux dont la transformée h de (RSH) vérifie :

1. h est paire.
2. h est holomorphe dans $|\Im(z)| \leq \frac{1}{2} + \epsilon$.
3. Dans cette bande, $|h(z)| \leq (1 + |z|)^{2-\epsilon}$.

Donnons comme exemple de tel noyau la fonction de Green $k(u) = G_s(u) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 (\xi(1-\xi))^{s-1} (\xi + u)^{-s} \mathrm{d}\xi$.

2.3.2 Opérateurs invariants intégraux

Un *opérateur intégral* est défini par :

$$(Lf)(z) = \int_{\mathbf{H}^2} k(z, w) f(w) \mathrm{d}\mu(w)$$

k est appelé le noyau de l'opérateur qui est dit *invariant* lorsque k est une fonction invariante par rapport au couple. Un exemple important de tel opérateur invariant est :

$$(-R_s)(f)(z) = \int_{\mathbf{H}^2} G_s(u(z, w)) f(w) \mathrm{d}\mu(w) \text{ où } \Re(s) > 1.$$

Proposition 2.5 *Si f est lisse et bornée alors :*

$$(\Delta + s(1-s)) R_s f = f.$$

En d'autres termes, R_s est l'inverse à droite de $(\Delta + s(1-s)) R_s$.

Proposition 2.6 *Les opérateurs invariants intégraux de noyau lisse commutent avec l'opérateur de Laplace sur l'espace des fonctions lisses à support compact.*

Il s'agit d'un calcul direct en remarquant que $(\Delta k(., w))(z) = (\Delta k(z, .))(w)$. Supposons que k est de nouveau un noyau vérifiant l'hypothèse 2.1.

Théorème 2.7 *Si* $(\Delta+\lambda)f = 0$ *alors il existe un complexe* $\Lambda(\lambda, k)$ *ne dépendant que de* λ *et de* k *et indépendant de* f *tel que :*

$$\int_{\mathbf{H}^2} k(z,w)f(w)\mathrm{d}\mu(w) = \Lambda(\lambda,k)f(z).$$

On peut prendre pour f la fonction $f(z) = \Im(z)^s$ qui est un vecteur propre de Δ pour la valeur propre $\lambda = s(1-s) = \frac{1}{4} + t^2$ et on peut effectivement calculer $\Lambda(s(1-s))$:

Théorème 2.8 $\Lambda(s(1-s)) = h(t)$ *où* h *est la transformée de (SHR) de* k*.*

En fait, les théorèmes 2.7 et 2.8 sont en fait valables pour k dont h vérifie les hypothèse 2.3.1.

2.4 Théorie spectrale du Laplacien hyperbolique

2.4.1 Développement en une pointe d'une forme automorphe

La *fonction de Whittaker* est :

$$W_s(z) = 2\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi y)e(x)$$

où :

1. $$I_\nu(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

2. $$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\,(\sin(\pi\nu))^{-1}\,[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] \text{ est la } \textit{fonction de Bessel.}$$

On contrôle le comportement en l'infini de ces deux fonctions spéciales.

Proposition 2.9 (Comportement en l'infini des fonctions de Bessel et Whittaker)

$$K_\nu(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\,\exp(-y)\,(1 + \mathcal{O}(\frac{1+(|\nu|)^2}{y}))$$
$$W_s(z) \sim_{y\to+\infty} e(x)\exp(-2\pi y).$$

On note :

1. $\mathcal{A}(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2)$ l'espace des *fonctions automorphes* de poids 0 pour Γ
2. $$\mathcal{A}_s(\Gamma\backslash\mathbf{H}^2) = \left\{f \in \mathcal{A}(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2),\,(\Delta+s(1-s))f = 0\right\} \text{ l'espace des } \textit{formes automorphes} \text{ pour } s$$
3. $$L^2(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2) = \left\{f \in \mathcal{A}(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2),\,||f||_2 < +\infty\right\}.$$

Rappelons alors le développement en une pointe κ d'une forme automorphe. On note σ_κ la matrice de normalisation en cette pointe.

Proposition 2.10 (Développement en une pointe d'une forme automorphe) *Si* f *dans* $\mathcal{A}_s(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2)$ *vérifie* $f(\sigma_\kappa) = o(\exp(2\pi y))$ *alors :*

$$f(\sigma_\kappa) = f_\kappa(y) + \sum_{n\neq 0}\hat{f}_\kappa(n)W_s(nz).$$

2.4.2 Séries d'Eisenstein

On fixe une pointe κ de Γ. A toute fonction ψ lisse sur $\mathbf{R}_+$, on associe la *série d'Eisenstein* suivante :

$$E_\kappa(z|\psi) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\kappa \setminus \Gamma} \psi(\Im(\sigma_\kappa^{-1}\gamma.z)).$$

On note $E_\kappa(z|\psi) = E_\kappa(z,s)$ si $\psi(y) = y^s$ avec $\Re(s) > 1$. On vérifie que $E_\kappa(z,s)$ est dans $\mathcal{A}_s(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ mais n'est pas dans $L^2(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$. Si ψ est à support compact alors $E_\kappa(z|\psi)$ appelée *série d'Eisenstein incomplète* est bornée mais n'est pas un vecteur propre de Δ. Par contre, il y a un lien intégral entre série d'Eisenstein incomplète et série d'Eisenstein par :

$$E_\kappa(z|\psi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} E_\kappa(z,s)\hat{\psi}(s)\mathrm{d}s \qquad \text{si} \qquad \sigma > 1.$$

On note :

1. $\mathcal{B}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ l'espace des fonctions automorphes bornées et lisses.
2. $\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ l'espace des séries d'Eisenstein incomplètes.

On remarque que $\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \subset \mathcal{B}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \subset L^2(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \subset \mathcal{A}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ et que $\mathcal{B}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ est dense dans $L^2(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$. La théorie des équations de Fredholm permet de prolonger $E_\kappa(z,s)$ en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec :

1. $E_\kappa(z,s)$ admet d'éventuels pôles simples dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$, pôles pour lesquels les résidus sont des formes automorphes de carré intégrable et orthogonales aux formes cuspidales développées dans la section suivante.
2. $E_\kappa(z,s)$ n'admet pas de pôles sur $\Re(s) = \frac{1}{2}$.
3. $s = 1$ est un pôle de $E_\kappa(z,s)$.

On vérifie que : $\Delta : \mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \longrightarrow \mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$. On verra par la suite que Δ admet sur $\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ un spectre continu formé par les séries d'Eisenstein $E_\kappa(z,s)$ pour $\Re(s) = \frac{1}{2}$ sauf un sous-espace de dimension finie de spectre discret formé par les résidus de $E_\kappa(z,s)$ sur $\frac{1}{2} < s \leq 1$. On note $\mathcal{R}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ l'espace vectoriel engendré par les résidus des séries d'Eisenstein aux pôles $s = s_j$ dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$. On a donc :

$$\mathcal{R}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) = \bigoplus_{\frac{1}{2} < s_j \leq 1} \mathcal{R}_{s_j}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$$

où $\mathcal{R}_{s_j}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ est l'espace vectoriel engendré par les résidus des séries d'Eisenstein en $s = s_j$. On peut montrer que chacun de ces espaces est de dimension finie inférieure au nombre de pointes de Γ. On munit l'espace $C_c^\infty(\mathbf{R}_+)$ du produit scalaire $< f, g >_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f(r)\overline{g(r)}\mathrm{d}r$ qui en fait un espace de Hilbert. Pour toute pointe κ de Γ, on définit l'opérateur E_κ de $C_c^\infty(\mathbf{R}_+)$ dans $L(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ par :

$$E_\kappa f(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} f(r) E(z, \frac{1}{2} + ir)\mathrm{d}r.$$

On peut montrer que :

$$< E_\kappa f, E_{\kappa'} g > = \delta_{\kappa,\kappa'} \ < f, g >_2$$

Ainsi, E_κ est une isométrie d'image $\mathcal{E}_\kappa(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ qui est orthogonale à $C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ et à $\mathcal{R}_\kappa(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$. De plus, $\Delta : \mathcal{E}_\kappa(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \longrightarrow \mathcal{E}_\kappa(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$.

Théorème 2.11 (Spectre continu du Laplacien hyperbolique)

$$\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) = \mathcal{R}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \oplus_\kappa \mathcal{E}_\kappa(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2).$$

Si f est dans $\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ alors :

$$f(z) = \sum_{j\geq 1} < f, \Phi_j > \Phi_j(z) \; + \sum_\kappa \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}} < f, E_\kappa(., \frac{1}{2} + ir) > E_\kappa(z, \frac{1}{2} + ir)\mathrm{d}r.$$

Si f est dans $\mathcal{E}(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2)\cap\mathcal{D}(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2)$ alors la série ci-dessus converge uniformément compactement.

2.4.3 Formes cuspidales

Proposition 2.12 *Si f est une fonction automorphe absolument intégrable alors :*

$$< f, E_\kappa(.|\psi) >= \int_0^{+\infty} f_\kappa(y)\overline{\psi}(y)y^{-2}\mathrm{d}y.$$

On note :

$$C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) = (\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2))^\perp.$$

Ainsi, $L^2(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) = \overline{C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)} \oplus^\perp \overline{\mathcal{E}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)}$. La proposition 2.12 assure que $C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ est l'espace des fonctions automorphes bornées lisses dont le premier coefficient de Fourier en chaque pointe est nul. Les formes automorphes dans $C(\Gamma\setminus\mathbf{H}^2)$ sont appelées *formes cuspidales.* On vérifie que : $\Delta : C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \longrightarrow C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$. On note :

$$\mathcal{D}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) = \left\{ f \in \mathcal{B}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2),\, \Delta f \in \mathcal{B}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \right\}.$$

On montre que $-\Delta \,:\, \mathcal{D}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ est un opérateur symétrique positif donc admet une unique extension auto-adjointe à $L^2(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$. Ainsi, Δ admet un spectre discret sur $C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ qui est rempli par les formes cuspidales.

Théorème 2.13 (Spectre discret du Laplacien hyperbolique) *Il existe une base orthonormée $(\Phi_j)_{j\geq 1}$ de vecteurs propres de Δ de $C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ formée de formes cuspidales. Chaque espace propre est de dimension finie.*
Si f est dans $C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ alors :

$$f(z) = \sum_{j\geq 1} < f, \Phi_j > \Phi_j(z) \text{ au sens du produit scalaire}$$

Enfin, si f est dans $C(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2) \cap \mathcal{D}(\Gamma \setminus \mathbf{H}^2)$ alors la série ci-dessus converge uniformément compactement.

2.5 Décomposition spectrale d'un noyau automorphe

Soit k un noyau satisfaisant l'hypothèse 2.1. Le *noyau automorphe* associé à k est :

$$K(z, w) \;=\; \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z, \gamma.w).$$

On peut appliquer les théorèmes 2.11 et 2.13 à ce noyau automorphe ce qui donne :

$$K(z,w) = \sum_j < K(.,w), \Phi_j > \Phi_j(z) \quad + \quad \sum_\kappa \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}} < K(.,w), E_\kappa(., \frac{1}{2}+ir) > \; E_\kappa(z, \frac{1}{2}+ir)\mathrm{d}r.$$

La proposition 2.12 et le théorème 2.8 fournissent les valeurs des produits scalaires impliqués ci-dessus d'où :

Théorème 2.14 (Décomposition spectrale d'un noyau automorphe)

$$K(z,w) = \sum_j h(r_j)\overline{\Phi_j(w)}\Phi_j(z) \quad + \quad \sum_\kappa \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}} h(r)\overline{E_\kappa(w, \frac{1}{2}+ir)}E_\kappa(z, \frac{1}{2}+ir)\mathrm{d}r.$$

En fait, le théorème 2.14 est valable pour un noyau k vérifiant les hypothèses 2.3.1.

Chapitre 3

Cas d'une algèbre de quaternions

3.1 Introduction

Rappelons pour mémoire que $\mathcal{A}|\mathbf{Q}$ est une algèbre de quaternions de division indéfinie et que $\Gamma_{\mathcal{R}}$ est le groupe des unités propres d'un ordre maximal $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ n'admet pas de pointe et la décomposition spectrale d'un noyau automorphe se simplifie en :

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma.w) = \sum_j h(r_j)\overline{\Phi_j(w)}\Phi_j(z). \tag{3.1}$$

Comme les opérateurs de Hecke sont hermitiens et commutent avec le Laplacien hyperbolique, on peut supposer que $(\Phi_j)_{j\geq 1}$ est une base orthonormée de formes cuspidales qui sont vecteurs propres des opérateurs de Hecke et du Laplacien hyperbolique. De faon plus précise, on pose :

$$T_n\Phi_j = \lambda_j(n)\Phi_j\ (n\wedge q=1) \tag{3.2}$$

$$-\Delta\Phi_j = \lambda_j\Phi_j \tag{3.3}$$

$$\lambda_j = \frac{1}{4}+r_j^2. \tag{3.4}$$

En appliquant l'opérateur de Hecke T_n à l'équation 3.1, on obtient l'équation suivante :

$$\sum_j h(r_j)\overline{\Phi_j(w)}\lambda_j(n)\Phi_j(z) = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n)} k(\gamma.z,w). \tag{3.5}$$

Pour trouver une borne supérieure à la norme infinie de Φ_{j_0}, il s'agit alors de choisir judicieusement une fonction h vérifiant les hypothèses faibles qui est grande au voisinage de r_{j_0} et petite ailleurs. Ainsi, la moyenne spectrale du membre de gauche se réduira essentiellement au terme en j_0 qui nous intéresse. La difficulté consiste donc principalement à estimer des expressions du type $u(\gamma.z,w)$. Ceci se fera dans un lemme de comptage qui est le point-clef de l'article. La recherche des bornes inférieures ne fera pas intervenir d'idée nouvelle par rapport aux techniques mises en oeuvre pour les bornes supérieures.

3.2 Résultat fondamental de comptage

Pour z dans $\mathbf{H}^2$, n entier naturel, δ réel strictement positif, on pose :

$$M(z,n,\delta) = card\{\gamma \in \mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z) < \delta.\}.$$

Le point-clef de l'article étudié dans ce rapport est l'estimation fine suivante de cette quantité :

Théorème 3.1 (HYPER IMPORTANT)

$$M(z,n,\delta) \ll_\epsilon (\delta + \delta^{\frac{1}{4}})n^{1+\epsilon} + n^\epsilon.$$

La suite de cette section contient la preuve de ce théorème.

3.2.1 Autour des stabilisateurs sous l'action de $SL_2(\mathbf{R})$

On note $K = SL_2(\mathbf{R})$ et on fixe z dans $\mathbf{H}^2$. On cherche alors à décrire le stabilisateur K_z de z pour l'action par homographies de K.

Proposition 3.2 (Description des stabilisateurs pour l'action de K) *Si $z = \frac{-\beta+i}{2\alpha}$ où $\beta^2 - 4\alpha\gamma = -1$ alors le stabilisateur de z peut être paramétré par :*

$$K_z = \left\{ \begin{pmatrix} t-\beta u & -2\gamma u \\ 2\alpha u & t+\beta u \end{pmatrix}, t^2+u^2 = 1 \right\}.$$

PREUVE :
On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} &= \Im(z) = y \quad \text{où } \alpha > 0. \\ \frac{-\beta}{2\alpha} &= \Re(z) = x. \\ \beta^2 - 4\alpha\gamma &= -1. \end{aligned}$$

Ceci implique que γ est strictement positif. On remarque que l'élément g suivant transforme i en z :

$$g = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $K_z = gK_ig^{-1}$ et on sait que K_i est $SO_2(\mathbf{R})$ ce qui assure le résultat •
Il s'agit maintenant de mettre en place la décomposition d'Iwasawa relative à un stabilisateur. On note :

1. $$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbf{R}_+ \right\}.$$

2. $$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}_+^* \right\}.$$

Proposition 3.3 (Décomposition d'Iwasawa relative à un stabilisateur) *Tout élément g de K s'écrit de manière unique comme :*

$$g = n\,a\,k \quad \text{où} n \in N,\, a \in A,\, k \in K_z.$$

PREUVE :
On note :

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

On pose $a = \left((\frac{a_3}{2\alpha})^2 + (a_4 - \frac{\beta a_3}{2\alpha})^2 \right)^{\frac{-1}{2}} \geq 0$. Comme $(\frac{a_3 a}{2\alpha})^2 + (a(a_4 - \frac{\beta a_3}{2\alpha}))^2 = 1$, il existe d'unique réels t et u tels que :

$$\begin{aligned} t^2 + u^2 &= 1 \\ u &= \frac{a_3 a}{2\alpha} \\ t &= a(a_4 - \frac{\beta a_3}{2\alpha}) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \beta u & -2\gamma u \\ 2\alpha u & t + \beta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in K.$$

Soit x dans $\mathbf{R}$ tel que $x_1 + x a_3 = a_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \beta u & -2\gamma u \\ 2\alpha u & t + \beta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & y \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in K.$$

Comme $a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1$ et $a_1 a_4 - y a_3 = 1$, on a : $a_2 = y$ •

3.2.2 Equations de Pell

Si d est un entier non carré alors on considère les deux équations suivantes dites de Pell :

$$x^2 - dy^2 = 1. \tag{3.6}$$

$$x^2 - dy^2 = l \quad \text{où} \quad l \in \mathbf{Z}. \tag{3.7}$$

Proposition 3.4 (Existence d'une solution à l'équation 3.6) *L'équation 3.6 admet une solution non triviale dans $\mathbf{Z}^2$ c'est-à-dire différente de $(\pm 1, 0)$.*

Proposition 3.5 (Résolution de l'équation 3.6) *Si (x_0, y_0) est une solution fondamentale de l'équation 3.6 c'est-à-dire :*

1. *(x_0, y_0) n'est pas triviale*
2. *$(x_0, y_0) \in \mathbf{Z}^2$*
3. *$D = x_0 + y_0\sqrt{d}$ est minimal*

alors les autres solutions sont exactement les couples (x, y) vérifiant $x + y\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^m$ où $m \in \mathbf{Z}$.

PREUVE :
Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux solutions de l'équation 3.6. On définit un couple (x_3, y_3) par $x_3 + y_3\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})(x_2 + y_2\sqrt{d})$. Ce nouveau couple est encore solution car :

$$x_3^2 - dy_3^2 = (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2).$$

De plus, on a :

$$(x_1 + y_1\sqrt{d})^{-1} = x_1 + (-y_1)\sqrt{d}.$$

Ainsi, tous les couples envisagés dans cette proposition sont effectivement solutions. Soit $(t,u) \in \mathbf{N}^2$ une solution de cette équation. On choisit un entier m tel que :

$$D^m \leq t + u\sqrt{d} \leq D^{m+1}.$$

Si $X + Y\sqrt{d} = \frac{t+u\sqrt{d}}{D^m}$ alors (X,Y) est une solution de 3.6. La minimalité de D assure que $(X,Y) = (1,0)$ d'où le résultat •

Proposition 3.6 (Résolution de l'équation 3.7) *Si l'équation 3.7 admet une solution* (u_0, v_0) *alors les autres solutions sont exactement les couples* (u,v) *vérifiant :*

$$u + v\sqrt{d} = \pm(u_0 + v_0\sqrt{d})(x_0 + y_0\sqrt{d})^m \quad \textit{où :}$$

$m \in \mathbf{Z}$, (x_0, y_0) *est une solution fondamentale de 3.6.*

PREUVE :

Soit (u,v) une solution de l'équation 3.7. On choisit m tel que :

$$1 \leq \frac{u + v\sqrt{d}}{(u_0 + v_0\sqrt{d})(x_0 + y_0\sqrt{d})^m} < x_0 + y_0\sqrt{d} = D.$$

Si $X + Y\sqrt{d} = \frac{u+v\sqrt{d}}{(u_0+v_0\sqrt{d})(x_0+y_0\sqrt{d})^m}$ alors (X,Y) est encore une solution de 3.7 ce qui, par minimalité de D, assure que $(X,Y) = (0,1)$ et le résultat •

On peut maintenant estimer le nombre de solutions bornées de l'équation 3.7 et c'est ce résultat qu'il faut retenir pour la suite. Notons :

$$C(n) = card\left\{(u,v) \in \mathbf{Z}^2,\ u^2 - dv^2 = l,\ |u| \leq \sqrt{n},\ |v| \leq \sqrt{n}\right\}.$$

Théorème 3.7 (Nombre de solutions bornées de l'équation de Pell) *Pour tout* $\epsilon > 0$, *on a :*

$$C(n) = \mathcal{O}_\epsilon(n^\epsilon).$$

PREUVE :

On peut supposer que l'équation de Pell 3.7 a une solution (u_0, v_0) car sinon ce théorème est trivialement vrai. Notons (x_0, y_0) une solution fondamentale de 3.6 et rappelons que $x_0 > 1$ et $y_0 > 0$. Le théorème 3.6 assure que les solutions (u,v) de 3.7 vérifient $u+v\sqrt{d} = \alpha(u_0+v_0\sqrt{d})(x_0+y_0\sqrt{d})^m$ où $m \geq 0$ et $\alpha \in \{\pm 1\}$. On peut identifier u et v en développant cette expression par la formule du binôme de Newton. Effectuons le travail pour u ce qui suffira amplement à convaincre le lecteur.

$$u = \alpha\Big(u_0 \sum_{0 \leq 2k \leq m} \binom{m}{2k} y_0^{2k} d^k x_0^{m-2k} + v_0 d \sum_{0 \leq 2k+1 \leq m} \binom{m}{2k+1} y_0^{2k+1} d^k x_0^{m-(2k+1)}\Big).$$

Ainsi, $|u| \ll (2x_0y_0d)^m$. Pour avoir $|u| \leq \sqrt{n}$, on doit avoir au moins $m \ll \ln(n)$ et donc $m \ll_\epsilon n^\epsilon$ ce qui achève la preuve car le nombre de solutions de l'équation 3.7 est finalement paramétré par m •

3.2.3 Un lemme important

Lemme 3.8 *Si* y *est un peu éloigné de* 0 $(0 < A \leq y)$ *et si* $\Delta \leq 1$ *alors :*

$$D(n) = card\left\{(r,s) \in \mathbf{Z}^2,\ |r^2 + ys^2 - n| \leq n\Delta\right\} \ll_\epsilon n^\epsilon(n\sqrt{\Delta} + 1).$$

PREUVE :
Le principe des tiroirs de Dirichlet assure que :

$$\forall Q \geq 1, \exists (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*,$$

1. $p \wedge q = 1$
2. $1 \leq q \leq Q$
3. $|\frac{p}{q} - y| \leq \frac{1}{qQ}$.

Comme $0 < A \leq y$, p et q sont des entiers naturels. Notons $\mathcal{E}(n) = \left\{(r,s) \in \mathbf{Z}^2,\ |r^2 + ys^2 - n| \leq n\Delta\right\}$ et prenons (r,s) dedans. $s^2 \leq \frac{2n}{A}$ car sinon $r^2 + ys^2 - n > r^2 + n \geq n$. D'autre part, $|qr^2 + ps^2 - qn| \leq \Delta nq + \frac{2n}{AQ}$. Cela résulte du fait que $qr^2 + ps^2 - qn = q(r^2 + ys^2 - n + (\frac{p}{q} - y)s^2)$ et de l'approximation rationnelle de y.
Fixons $Q = \Delta^{\frac{-1}{2}} + A^{-1} \geq 1$. Prouvons que ce choix de Q assure que $p \geq 1$. L'approximation de y assure que $|\frac{p}{q}| \geq |y| - \frac{1}{qQ}$ donc :

$$p \geq A - \frac{1}{Q} = \frac{A}{1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{A}} > 0.$$

On a alors :

$$|qr^2 + ps^2 - qn| \leq H = (1 + \frac{3}{A})n\sqrt{\Delta}.$$

En effet, $\Delta nq + \frac{2n}{AQ} \leq \Delta nQ + \frac{2n}{AQ} = \sqrt{\Delta}n(1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{A} + \frac{2}{A+\sqrt{\Delta}}) \leq H$. Ainsi,

$$D(n) \leq \sum_{|m-qn| \leq H} card\left\{(r,s) \in \mathbf{Z}^2,\ qr^2 + ps^2 = m\right\}. \tag{3.8}$$

Il s'agit alors d'estimer $D_m(n) = card\left\{(r,s) \in \mathbf{Z}^2,\ qr^2 + ps^2 = m\right\} = card(\mathcal{E}_m(n))$.
Pour cela, on peut supposer que p et q sont sans facteur carré. Posons :

1. $d = -pq < 0$
2. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$
3. $D = Disc(K)$
4. (ω_1, ω_2) la base canonique de $\mathcal{O}_K$.

Supposons que $d \equiv 2, 3[4]$ ce qui entraîne que $D = 4d$ et $(\omega_1, \omega_2) = (1, \sqrt{d})$. Le cas $d \equiv 1[4]$ se traîte de manière analogue. Soit $\tilde{a}$ l'idéal de $\mathcal{O}_K$ engendré par q et $\sqrt{d}$. On a : $N(\tilde{a})^2 = \frac{Disc(\tilde{a})}{Disc(K)} = q^2$. A tout élément (r,s) de $\mathcal{E}_m(n)$, on associe l'idéal principal de $\mathcal{O}_K$ engendré par $rq + s\sqrt{d}$ noté $\tilde{a}(r,s)$. On vérifie que cet idéal principal est de norme égale à la norme de son générateur soit $q^2r^2 + pqs^2 = qm$. Comme $rq + s\sqrt{d}$ est aussi dans $\tilde{a}$, $\tilde{a}(r,s)$ divise $\tilde{a}$ donc $\tilde{a}/\tilde{a}(r,s)$ est encore un idéal entier de $\mathcal{O}_K$ de norme $\frac{qm}{q} = m$. On vient ainsi de construire une application ϕ de $\mathcal{E}_m(n)$ dans l'ensemble des idéaux entiers de $\mathcal{O}_K$ de norme m. On vérifie que $\phi(r,s) = \phi(r',s')$ si et seulement si $rq + s\sqrt{d} = x(r'q + s'\sqrt{d})$ où x est une unité de $\mathcal{O}_K$. Finalement :

$$card(\mathcal{E}_m(n)) \leq card(\mathcal{O}_K^*)card(\text{idéaux entiers de norme m}) \leq 6\tau(m) \ll_\epsilon m^\epsilon.$$

Cette estimation et l'estimation 3.8 achève la preuve de ce lemme •

3.2.4 Preuve du théorème 3.1

On veut montrer que $M(z,n,\delta) \ll_\epsilon (\delta + \delta^{\frac{1}{4}})n^{1+\epsilon} + n^\epsilon$. Supposons dans un premier temps que $\delta \leq 1$.
On remarque déjà que pour γ_0 dans $\mathcal{R}_1$ $M(z,n,\delta) = M(\gamma_0.z,n,\delta)$. Cela résulte directement que l'application qui à γ dans le premier ensemble associe $\gamma_0\gamma\gamma_0^{-1}$ dans le deuxième ensemble est une bijection. On peut donc se limiter à prendre z dans un compact B qui est l'adhérence du domaine fondamental de la surface $\mathcal{S}_\mathcal{R}$. On fixe une fois pour toutes z dans B et on se souvient que si $z = \frac{-\beta+i}{2\alpha}$ où $\beta^2 - 4\alpha\gamma = -1$ alors la proposition 3.2 assure que le stabilisateur de z pour $SL_2(\mathbf{R})$ est :

$$K_z = \left\{ \begin{pmatrix} t-\beta u & -2\gamma u \\ 2\alpha u & t+\beta u \end{pmatrix}, t^2+u^2 = 1 \right\}.$$

Quand z décrit B alors α, β, γ restent bornés car ces trois quantités dépendent continuement de z. Soit γ dans $\mathcal{R}(n)$ vérifiant $u(\gamma.z,z) < \delta$. Notons $\gamma = pk$ la décomposition d'Iwasawa relative à K_z. On a donc :

1. $$k \in K_z$$

2. $$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & \frac{1}{p_1} \end{pmatrix} \text{ où } p_1 \geq \frac{1}{p_1} \text{ et } p_2 \geq 0.$$

Montrons que $||p - 1_2|| \ll \sqrt{\delta}$.
Comme k est dans le stabilisateur de z, $u(\gamma.z,z)$ est égal à $u(p.z,z)$. Un simple calcul assure que :

$$u(p.z,z) = \frac{(p_1 - \frac{1}{p_1})^2|z|^2 + p_2^2 + 2p_2(p_1 - \frac{1}{p_1})\Re z}{\Im(z)^2}.$$

z se ballade dans un compact donc il existe m_1, m_2 et M tels que :

$$(p_1 - \frac{1}{p_1})^2 m_1 + p_1^2 + 2p_2(p_1 - \frac{1}{p_1})m_2 < \delta M^2.$$

L'estimation ci-dessus implique que $||p - 1_2|| \ll \sqrt{\delta}$.
Montrons que $|k| \ll 1$.
$|k|^2 = 2t^2 + (2\beta^2 + 4\gamma^2 + 4\alpha^2)u^2 \ll t^2 + u^2 = 1$.
Les deux remarques précédentes assurent que $\gamma = k + \mathcal{O}(1_2)$. De plus, il existe E ne dépendant que de $\mathcal{R}$ tel que :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} x_0 - x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 + x_1\sqrt{a} \end{pmatrix} \text{ où } Ex_j \in \mathbf{Z}.$$

Par identification, on doit étudier le système suivant carré de taille 4 dans lequel $t^2+u^2=1$:

$$\frac{x_0 - x_1\sqrt{a}}{\sqrt{n}} = t - \beta u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.9}$$

$$\frac{x_0 + x_1\sqrt{a}}{\sqrt{n}} = t + \beta u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.10}$$

$$\frac{x_2 + x_3\sqrt{a}}{\sqrt{n}} = -2\gamma u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.11}$$

$$\frac{b(x_2 - x_3\sqrt{a})}{\sqrt{n}} = 2\alpha u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.12}$$

Par des combinaison linéaires évidentes, ce système est équivalent au système $(\mathcal{E})$ suivant :

$$\frac{2x_0}{\sqrt{n}} = 2t + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.13}$$

$$\frac{2x_1\sqrt{a}}{\sqrt{n}} = 2\beta u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.14}$$

$$\frac{2x_2}{\sqrt{n}} = 2\Big(\frac{\alpha}{b} - \gamma\Big)u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.15}$$

$$\frac{2x_3\sqrt{a})}{\sqrt{n}} = -2\Big(\frac{\alpha}{b} + \gamma\Big)u + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}). \tag{3.16}$$

Comme $\beta^2 - 4\alpha\gamma = -1$, on a $|\beta| \geq \frac{1}{2}$ ou $|\gamma - \frac{\alpha}{\beta}| \geq \frac{1}{2}$ ou $|\gamma + \frac{\alpha}{\beta}| \geq \frac{1}{2}$. Supposons par exemple que $|\beta| \geq \frac{1}{2}$. Dans les autres cas, il suffit de procéder de même en remplacant x_1 par x_j.
$1 = t^2 + u^2 = \left(\frac{x_0}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}(\sqrt{\delta})\right)^2 + \left(\frac{x_1\sqrt{a}}{\beta\sqrt{n}} + \mathcal{O}(\sqrt{\delta})\right)^2 = \frac{x_0^2}{n} + \frac{x_1^2 a}{\beta^2 n} + \mathcal{O}(\sqrt{\delta})$ car $\delta \leq \sqrt{\delta}$.On arrive donc à l'équation suivante :

$$|x_0^2 + \frac{a}{\beta^2}x_1^2 - n| \ll n\sqrt{\delta}. \tag{3.17}$$

Le lemme 3.8 assure que :

$$card\left\{(x_0,x_1) \in \mathbf{Z}^2, \exists\gamma = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} x_0 - x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ b(x_2 - x_3\sqrt{a}) & x_0 + x_1\sqrt{a}\end{pmatrix} \in \mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z) < \delta\right\} \ll_\epsilon n^\epsilon(n\delta^{\frac{1}{4}}+1).$$

Soit (x_0,x_1) comme ci-dessus. On remarque que $|x_j| \ll \sqrt{n}$ car $\delta \leq 1$ et que (γ est de déterminant n) :

$$x_2^2 - ax_3^2 = \frac{n - x_0^2 + ax_1^2}{-b} = l. \tag{3.18}$$

Le théorème 3.7 assure que x_2 et x_3 peuvent être choisis de $\mathcal{O}_\epsilon(n^\epsilon)$ facons soit au final $\mathcal{O}_\epsilon(n^{2\epsilon}(n\delta^{\frac{1}{4}}+1)$.
Supposons maintenant que $\delta > 1$.
Le système $\mathcal{E}$ est encore valide donc :

$$|x_j| \ll \sqrt{n\delta}.$$

On a encore :

$$x_0^2 - ax_1^2 - bx_2^2 + abx_3^2 = n.$$

Ainsi, on peut choisir x_0 et x_1 de $\mathcal{O}(n\delta)$ facons au plus puis x_2 et x_3 ont $\mathcal{O}_\epsilon(n^\epsilon)$ possibilités d'où au final $\mathcal{O}_\epsilon(n^{\epsilon+1}\delta)$ ce qui achève la preuve de ce résultat de comptage.

3.3 Bornes supérieures

3.3.1 Construction et étude d'un noyau convenable

On pose pour $T \geq 2$:

$$h(r) = \frac{4\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi r}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi T}{2}\right)}{\cosh(\pi r) + \cosh(\pi T)}. \tag{3.19}$$

h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et un calcul direct assure que :

$$h'(r) = \frac{4\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi T}{2}\right) s(r)}{(\cosh(\pi r) + \cosh(\pi T))^2} \quad \text{où} \quad s(r) = \pi \sinh\left(\frac{\pi r}{2}\right) \left[\frac{\cosh(\pi T) - \cosh(\pi r)}{2} - 1\right].$$

Ainsi, $h'(r) = 0$ si et seulement si $r = 0$ ou $r = \pm r_1 \simeq T$ où $r_1 = \frac{1}{\pi} \coth(\cosh(\pi T) - 2)$. On note M et m le maximum et le minimum de h et on remarque que :

$$m = h(0) = \frac{4\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi T}{2}\right)}{1 + \cosh(\pi T)} \text{ et} M = h(\pm r_1) = \frac{\pi^2 \sinh(\pi T)}{\cosh(\pi T) - 1}.$$

Résumons tous les résultats précédents dans le tableau de variations suivant :

r	$-\infty$		$-r_1$		0		r_1		$+\infty$
$h'(r)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$h(r)$	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

Proposition 3.9 (Premières propriétés de h)

$$h(r) \geq 0. \tag{3.20}$$

$$h(r) \geq 1 \; sur \; [T-1, T+1]. \tag{3.21}$$

Proposition 3.10 (Transformées inverses de h)

$$g(\xi) = \frac{2\pi \cos(\xi T)}{\cosh(\xi)}. \tag{3.22}$$

$$q(v) = \frac{\pi}{2}(2v+1)^{-1} \left[(\sqrt{v+1} + \sqrt{v})^{2iT} + (\sqrt{v+1} + \sqrt{v})^{-2iT}\right]. \tag{3.23}$$

Proposition 3.11 (Estimations de q)

$$|q(v)| \leq \pi(2v+1)^{-1}. \tag{3.24}$$

$$|q'(v)| \leq \pi T v^{\frac{-1}{2}} (v+1)^{\frac{-3}{2}}. \tag{3.25}$$

$$|q''(v)| \leq \pi T^2 v^{-1}. \tag{3.26}$$

Proposition 3.12 (Propriétés importantes du noyau)

$$|k(u)| \leq 4\sqrt{T} \frac{1}{u^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(u+1)^{\frac{5}{4}}} \; si \, u > 0. \tag{3.27}$$

$$k(u) = T + \mathcal{O}(1 + \sqrt{u} T^2) \; si \, 0 \leq u \leq 1. \tag{3.28}$$

PREUVE :
Supposons que u est strictement positif. La proposition 2.2 assure que :

$$-\pi k(u) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} q'(v+u)\mathrm{d}v.$$

Ecartons-nous de la singularité 0 d'une distance η afin de pouvoir faire une intégration par parties pour augmenter la puissance du dénominateur et majorons le reste grâce à l'estimation 3.11 :

$$|\int_0^{\eta}| \leq \frac{\pi T}{u^{\frac{1}{2}}(u+1)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\eta} \frac{1}{\sqrt{v}}\mathrm{d}v = \frac{2\pi T}{u^{\frac{1}{2}}(u+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\eta}.$$

Une intégration par parties et l'estimation 3.11 assure que :

$$|\int_{\eta}^{+\infty}| = \frac{-q(\eta+u)}{\sqrt{\eta}} + \frac{1}{2}\int_{\eta}^{+\infty} q(v+u)v^{\frac{-3}{2}}\mathrm{d}v$$

$$|\int_{\eta}^{+\infty}| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\eta}}\frac{1}{2(\eta+u)+1} + \frac{1}{2}\int_{\eta}^{+\infty} v^{\frac{-3}{2}}\frac{\pi}{2(u+v)+1}\mathrm{d}v.$$

En minorant η par 0, on obtient que :

$$|k(u)| \leq \frac{2T}{u^{\frac{1}{2}}(u+1)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\eta} + \frac{2}{2u+1}\frac{1}{\sqrt{\eta}}.$$

En prenant $\eta = (T\sqrt{u(u+1)})^{-1}$, on a :

$$|k(u)| \leq \frac{2\sqrt{T}}{u^{\frac{1}{4}}(u+1)^{\frac{5}{4}}}\left(\frac{1}{\sqrt{u(u+1)}} + \frac{\sqrt{u(u+1)}}{2u+1}\right)$$

ce qui assure le résultat car le dernier terme est borné par 2.
Supposons que u est compris entre 0 et 1. Estimons pour commencer les accroissements de q'. Pour v réel positif, on a :

$$q'(u+v) - q'(v) = \int_v^{u+v} q''(z)\mathrm{d}z.$$

En utilisant l'estimation 3.11, on obtient que :

$$|q'(u+v) - q'(v)| \leq \pi T^2 \ln(1+\frac{u}{v}).$$

Estimons maintenant $k(0)$. On rappelle que :

$$k(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} t\tanh(\pi t)h(t)\mathrm{d}t.$$

$$k(0) = 2\pi\cosh(\frac{\pi T}{2})\int_0^{+\infty} t\frac{\sinh(\pi t)\cosh(\frac{\pi t}{2})}{\cosh(\pi t)(\cosh(\pi t)+\cosh(\pi T))}\mathrm{d}t.$$

En remarquant que $\sinh(\pi t)\cosh(\frac{\pi t}{2}) = \sinh(\frac{\pi t}{2})(\cosh(\frac{\pi t}{2}))^2$, on montre que :

$$k(0) = T + \mathcal{O}(1).$$

Enfin, la proposition 2.2 assure que :

$$k(u)-k(0)=\frac{-1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{q'(w+u)-q'(w)}{\sqrt{w}}\mathrm{d}w.$$

On a donc :

$$|k(u)-k(0)|\leq T^2\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{u}{w}\right)}{\sqrt{w}}\mathrm{d}w=T^2\,I.$$

Calculons I par une intégration par parties :

$$I=2\left[\sqrt{w}\ln\left(1+\frac{u}{w}\right)\right]_0^{+\infty}+2u\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{w}(u+w)}\mathrm{d}w=2\pi\sqrt{u}$$

ce qui assure le résultat •

Théorème 3.13 (Estimation finale du noyau automorphe)

$$K(z,z)=\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n)}k(\gamma.z,z)\ \ll_\epsilon\ (T+n\sqrt{T})n^\epsilon.$$

Preuve :

Notons pour la suite de cette preuve $f(\delta)=\delta^{\frac{-1}{4}}(1+\delta)^{\frac{-5}{4}}$. Cette application est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et a pour dérivée $f'(\delta)=\frac{-1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1+\delta}\right)$.

On a :

$$K(z,z)=\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n),u(\gamma.z,z)\leq n^{-4}}k(u(\gamma.z,z))+\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n),u(\gamma.z,z)>n^{-4}}k(u(\gamma.z,z)).$$

Les estimations 3.12 sur le noyau k assurent que :

$$K(z,z)\ll TM(z,n,n^{-4})\ +\ \sqrt{T}\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n),u(\gamma.z,z)>n^{-4}}f(u(\gamma.z,z)).$$

Comme $\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n),u(\gamma.z,z)>n^{-4}}f(u(\gamma.z,z))=\int_{n^{-4}}^{+\infty}f(\delta)\mathrm{d}M(z,n,\delta)$, une intégration par parties assure que :

$$K(z,z)\ll TM(z,n,n^{-4})+\sqrt{T}[f(\delta)M(z,n,\delta)]_{n^{-4}}^{+\infty}-\sqrt{T}\int_{n^{-4}}^{+\infty}f'(\delta)M(z,n,\delta)\mathrm{d}\delta=\ S_1+S_2+S_3.$$

Il s'agit alors d'estimer chacun de ces termes grâce au théorème 3.1. Commençons par S_1 :

$$S_1\ll_\epsilon T\left[(n^{-4}+n^{-1})n^{1+\epsilon}+n^\epsilon\right].$$

On obtient de même pour S_2 :

$$S_2\ll_\epsilon \sqrt{T}n(1+n^{-4})^{\frac{-5}{4}}\left[(n^{-4}+n^{-1})n^{1+\epsilon}+n^\epsilon\right].$$

On a pour S_3 :

$$S_3\ll_\epsilon \sqrt{T}n^\epsilon\int_{n^{-4}}^{+\infty}f(\delta)\Big(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{1+\delta}\Big)((\delta+\delta^{\frac{1}{4}})n+1)\mathrm{d}\delta=\sqrt{T}n^\epsilon\,I.$$

Il s'agit alors d'estimer cette intégrale I.

$I\leq nI_1+nI_2+I_3+I_4$ où

1.
$$I_1 = \int_{n^{-4}}^{1} f(\delta)\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)(\delta + \delta^{\frac{1}{4}})\mathrm{d}\delta$$

2.
$$I_2 = \int_{1}^{+\infty} f(\delta)\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)(\delta + \delta^{\frac{1}{4}})\mathrm{d}\delta \,(\text{constante finie})$$

3.
$$I_3 = \int_{n^{-4}}^{1} f(\delta)\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)\mathrm{d}\delta.$$

4.
$$I_4 = \int_{1}^{+\infty} f(\delta)\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)\mathrm{d}\delta. \,(\text{constante finie})$$

On vérifie immédiatement que $I_3 \leq n \int_{n^{-4}}^{1} \frac{1}{\delta}\mathrm{d}\delta \leq 4n\ln(n)$ en minorant $\delta^{\frac{-1}{4}}$ par n.
Enfin, on a :
$I_1 = J_1 + J_2$ où :

1.
$$J_1 = \int_{n^{-4}}^{1} f(\delta)(1 + \frac{\delta}{1+\delta})\mathrm{d}\delta.$$

2.
$$J_2 = \int_{n^{-4}}^{1} f(\delta)(\frac{1}{\delta^{\frac{3}{4}}} + \frac{\delta^{\frac{1}{4}}}{1+\delta})\mathrm{d}\delta.$$

Enfin,

1.
$$J_1 \leq 2\int_{n^{-4}}^{1} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}\delta \leq 2\int_{0}^{1} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}}\mathrm{d}\delta$$

2.
$$J_2 \leq \int_{n^{-4}}^{1} \frac{1}{\delta}\mathrm{d}\delta + n\int_{n^{-4}}^{1} \frac{1}{(1+\delta)^{\frac{5}{4}+1}}\mathrm{d}\delta \leq 4\ln(n) + n\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+\delta)^{\frac{5}{4}+1}}\mathrm{d}\delta.$$

Toutes ces estimations achèvent la preuve car $\ln n \ll_\epsilon n^\epsilon$ •

3.3.2 Preuve du théorème A

Pour n premier avec q et $j \geq 1$, on note :

$$\eta_j(n) = \frac{\lambda_j(n)}{\sqrt{n}}.$$

Lemme 3.14 *Pour $nm \wedge q = 1$ et $j \geq 1$, on a :*

$$\eta_j(n)\eta_j(m) = \sum_{d|m\wedge n} \eta_j(\frac{mn}{d^2}).$$

PREUVE DU LEMME 3.14 :
Le théorème 1.12 assure que :

$$T_n \circ T_m = \sum_{d\,|m\wedge n} dT_{\frac{nm}{d^2}}$$

Il suffit alors d'appliquer l'opérateur ci-dessus au vecteur propre (donc non nul) Φ_j pour prouver ce lemme •

Lemme 3.15 *Pour $nm \wedge q = 1$, on a :*

$$\sum_{j\geq 1} h(r_j)\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)}\eta_j(m)\eta_j(n) = \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\frac{mn}{d^2})} k(\gamma.z, w).$$

PREUVE DU LEMME 3.15 :
Notons S_1 la somme intervenant dans le membre de gauche de l'égalité ci-dessus. Le lemme 3.14 assure que :

$$S_1 = \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \sum_{j\geq 1} h(r_j)\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)}\lambda_j(\frac{mn}{d^2}).$$

Le théorème 2.14 assure le résultat •

Théorème 3.16 (Théorème A) *Pour $\epsilon > 0$, $N, T \geq 1$ et $(\alpha_n)_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1}$ une suite complexe, on a :*

$$\sum_{T\leq\sqrt{\lambda_j}\leq T+1} |\Phi_j(z)|^2 \,|\sum_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1} \alpha_n \frac{\lambda_j(n)}{\sqrt{n}}|^2 \ll_\epsilon N^\epsilon\Big[T \sum_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1} |\alpha_n|^2 + N\sqrt{T}\Big(\sum_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1} |\alpha_n|\Big)^2\Big].$$

PREUVE DU THÉORÈME A :
On note :

$$S_2 = \sum_{j\geq 1} h(r_j)|\Phi_j(z)|^2 |\sum_{1\leq n\leq N} \alpha_n\eta_j(n)|^2;$$

Aprè avoir ouvert le carré et interverti les sommes, on arrive à :

$$S_2 = \sum_{1\leq m,n\leq N} \alpha_n\overline{\alpha_m} \sum_{j\geq 1} h(r_j)|\Phi_j(z)|^2\eta_j(m)\eta_j(n).$$

Le lemme 3.15 assure alors que :

$$S_2 = \sum_{1\leq m,n\leq N} \alpha_n\overline{\alpha_m} \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\frac{mn}{d^2})} k(\gamma.z, z).$$

Or, pour $d|m\wedge n$, le théorème 3.13 assure que :

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\frac{mn}{d^2})} k(\gamma.z, z) \ll_\epsilon \sum_{d|m\wedge n} \Big(\frac{mn}{d^2}\Big)^\epsilon \Big(T + \frac{mn}{d^2}\sqrt{T}\Big).$$

On arrive donc à : $S_2 \ll_\epsilon N^\epsilon[TS_2(1) + \sqrt{T}S_2(2)]$ où :

1.
$$S_2(1) = \sum_{1\le m,n\le N} |\alpha_m \alpha_n| \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}}$$

2.
$$S_2(2) = \sum_{1\le m,n\le N} |\alpha_m \alpha_n| \sum_{d|m\wedge n} \frac{\sqrt{mn}}{d}.$$

On a $S_2(2) \le N \sum_{1\le m,n\le N} |\alpha_m\alpha_n|\tau(m\wedge n)$.Ainsi,

$$S_2(2) \ll_\epsilon N^{1+\epsilon}\Big(\sum_{1\le n\le N} |\alpha_n|\Big)^2.$$

Pour estimer $S_2(1)$, on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} m &= m'l \\ n &= n'l \\ l &= m\wedge n. \end{aligned}$$

On remarque que m' et n' sont alors premiers entre eux.

$$S_2(1) \le \sum_{m'\wedge n'=1} \sum_{1\le m'l, n'l\le N} \tau(l)|\frac{\alpha_{ln'}}{\sqrt{m'}}\frac{\alpha_{lm'}}{\sqrt{n'}}|.$$

L'inégalité arithmético-gómétrique assure alors que :

$$S_2(1) \ll_\epsilon N^\epsilon \sum_{1\le m'l,n'l\le N} \Big(\frac{|\alpha_{ln'}|^2}{m'} + \frac{|\alpha_{lm'}|^2}{n'}\Big).$$

Enfin, chacune des deux sommes est majorée par $\ln(N)\sum_{1\le n\le N}|\alpha_n|^2$. Finalement :

$$S_2(1) \ll_\epsilon N^\epsilon \sum_{1\le n\le N} |\alpha_n|^2.$$

Ecrivons lors un bilan pour S_2 :

$$S_2 \ll_\epsilon N^\epsilon\Big[T\sum_{1\le n\le N}|\alpha_n|^2 + \sqrt{T}N\Big(\sum_{1\le n\le N}|\alpha_n|\Big)^2\Big].$$

Or, on se souvient que $\lambda_j = \frac{1}{4} + r_j^2$, $h(r)\ge 0$ et $h(r) \ge 1\, si\, T-1 \le r \le T+1$ ce qui achève la preuve •

3.3.3 Preuve du théorème B

Théorème 3.17 (Théorème B)

$$\forall j \ge 1,\, \forall \epsilon > 0,\, ||\Phi_j||_\infty \ll_\epsilon \lambda_j^{\frac{5}{24}+\epsilon}.$$

Preuve du théorème B :
On fixe $j_0 \geq 1$ et on prend $T = r_{j_0}$. On définit une suite α_n pour n premier avec q et compris entre 1 et N par :

$$\alpha_n = \begin{cases} \eta_{j_0}(p) & \text{si } n = p \leq \sqrt{N} \text{ où } p \text{ ne divise pas } q \\ -1 & \text{si } n = p^2 \leq N \text{ où } p \text{ est un nombre premier ne divisant pas } q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que si p est un nombre premier ne divisant pas q alors :

$$\eta_{j_0}(p)^2 - \eta_{j_0}(p^2) = 1.$$

Le théorème A assure alors que :

$$|\Phi_{j_0}(z)|^2 \Big(\sum_{p \leq \sqrt{N}} \Big)^2 \ll_\epsilon N^\epsilon \Big\{ T \Big(\sum_{p \leq \sqrt{N}} |\eta_{j_0}(p)|^2 + \sum_{p \leq \sqrt{N}} 1 \Big) + N\sqrt{T} \Big(\sum_{p \leq \sqrt{N}} |\eta_{j_0}(p)| + \sum_{p \leq \sqrt{N}} 1 \Big)^2 \Big\}.$$

On admet pour la suite de la preuve que :

$$\sum_{n \leq N} |\eta_{j0}(n)|^2 \ll_\epsilon N r_{j_0}^\epsilon.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarzz combinée avec le résultat précédent entraînent que :

$$\frac{|\Phi_{j_0}(z)|^2}{N^\epsilon} \ll_\epsilon T \Big(\frac{\sqrt{N} T^\epsilon}{(\sum_{p \leq \sqrt{N}} 1)^2} + 1 \Big) + N\sqrt{T} \Big(\frac{N^{\frac{1}{4}} T^{\frac{\epsilon}{2}}}{\sqrt{\sum_{p \leq \sqrt{N}} 1}} + 1 \Big)^2.$$

Or, le théorème de Tchebitchev assure que :

$$\frac{\sqrt{N}}{\ln N} \ll \sum_{p \leq \sqrt{N}} 1 \ll \frac{\sqrt{N}}{\ln N}.$$

On aboutit donc à :

$$|\Phi_{j_0}(z)|^2 \ll_\epsilon (NT)^\epsilon \Big(\frac{T}{\sqrt{N}} + N\sqrt{T} \Big).$$

On choisit $N = T^{\frac{1}{3}}$ pour conclure •

3.4 Bornes inférieures

3.4.1 Construction et étude d'un noyau convenable

On choisit une fonction g vérifiant :

1. $g \in C_c^\infty(\mathbf{R})$.
2. $Supp(g) = [-1, 1]$.
3. $g \geq 0$.
4. g est paire.

5. $\int_{-1}^{+1} g(\xi)\mathrm{d}\xi = 1$.

Cela entraîne que h et k sont deux fonctions positives. On pose pour $T \geq 2, g_T(u) = Tg(uT)$ et on note k_T le noyau correspondant.

Proposition 3.18 (Premières propriétés du noyau k_T)

$$k_T(u) \geq 0. \tag{3.29}$$

$$k_T(u) = 0 \quad si \quad u \geq \frac{1}{T^2}. \tag{3.30}$$

$$k_T(u) \ll T^{\frac{5}{2}} \quad si \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{T^2}. \tag{3.31}$$

PREUVE :

Seule la dernière propriété mérite réflexion. On se sert de l'écriture $k_T(u) = k_T(u) - k_T(0) + k_T(0)$ pour arriver à :

$$k_T(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{q'(w) - q'(w+u)}{\sqrt{w}}\mathrm{d}w \; + \; \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v \tanh(\pi v) h_T(v)\mathrm{d}v.$$

La proposition 2.3 et le fait que q'' a son support inclus dans un segment entraînent le résultat •

Intoduisons d'autres coordonnées sur le demi-plan de Poincaré à savoir les coordonnées polaires géodésiques. On rappelle que l'on note :

1. $K = SL_2(\mathbf{R})$.
2. $K_i = \left\{ k(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \right\}$ le stabilisateur de i.
3. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a > 0 \right\}$.
4. μ la mesure de Poincaré sur $\mathbf{H}^2$.

Proposition 3.19 (Coordonnées polaires géodésiques)

$$K = K_i A K_i. \tag{3.32}$$

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{R}_+^* \times [0,\pi[& \longrightarrow & \mathbf{H}^2 \setminus \{i\} & \textit{est une bijection} \\ (r,\phi) & \mapsto & k(\phi)\exp(-r)i. & \end{array} \tag{3.33}$$

$$\mathrm{d}\mu(z) = 2\sinh(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi. \tag{3.34}$$

PREUVE :

Soit g dans $SL_2(\mathbf{R}) = K$. On choisit k_1 dans K tel $g_1 = k_1 g$ est une matrice symétrique. On choisit k dans K tel que $a = kg_1k^{-1}$ est diagonale ce qui prouve la première partie de la proposition. Ensuite, on remarque que si $g = k(\phi)a(e^{-r})k(\theta)$ alors r est précisément la distance hyperbolique entre i et $z = g.i = x + iy$ et $k(\phi)$ agit comme une rotation d'angle 2ϕ ce qui entraînent la deuxième partie de la proposition. La troisième partie est un simple calcul de Jacobien •

Corollaire 3.20 *Si γ est un élément elliptique de $SL_2(\mathbf{R})$ avec $Tr(\gamma) = 2\cos\theta$ où $0 < \theta < \pi$ alors*

$$\int_{\mathbf{H}^2} k_T(\gamma.z, z)\mathrm{d}\mu(z) = \int_0^{+\infty} \frac{g_T(r)\cosh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh r - \cos 2\theta}\mathrm{d}r.$$

Preuve : Notons I l'intégrale de gauche. On choisit σ dans K tel que $\sigma\gamma\sigma^{-1} = k(\theta)$. On a alors :

$$I = \int_{\mathbf{H}^2} k_T(u(\sigma\gamma.z, \sigma.z))\mathrm{d}\mu(z).$$

Le changement de variables $z' = \sigma.z$ assure que :

$$I = \int_{\mathbf{H}^2} k_T(k(\theta.z, z))\mathrm{d}\mu(z).$$

On passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées géodésiques :

$$I = \int_{\mathbf{R}_+}\int_{[0,\pi[} k_T(u(k(\theta)k(\phi)e^{-r}.i, k(\phi)e^{-r}.i))2\sinh r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi.$$

Comme $k(\theta)$ et $k(\phi)$ commutent, on a :

$$I = \pi\int_0^{+\infty} k_T(u(k(\theta)e^{-r}.i, e^{-r}.i))\sinh r\mathrm{d}r$$

On vérifie que :

$$u(k(\theta).z, z) = \sin\theta^2\Big(\frac{|z^2+1|}{\Im z}\Big)^2.$$

Ainsi, $I = \pi\int_0^{+\infty} k_T((\sin\theta\sinh r)^2)2\sinh r\mathrm{d}r$ d'où :

$$I = \frac{\pi}{\sin\theta}\int_0^{+\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u+\sin\theta^2}}\mathrm{d}u.$$

Pour $a > 0$, calculons $J(a) = \int_0^{+\infty}\frac{k(u)}{\sqrt{u+\sin\theta^2}}\mathrm{d}u$ puis on fera $a = \sin\theta$. On a :

$$J(a) = \frac{-1}{\pi}\int_0^{+\infty} q_T'(v)\int_0^v\Big((v-u)(u+a^2)\Big)^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$J(a) = \frac{-1}{\pi}\int_0^{+\infty} q_T'(v)\int_0^{\frac{v}{v+a^2}}\Big((1-u)u)\Big)^{\frac{-1}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$J(a) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{g_T(r)\cosh\left(\frac{r}{2}\right)}{a^2+\sinh\left(\frac{r}{2}\right)^2}\mathrm{d}r$$

ce qui achève la preuve de ce corollaire •

3.4.2 Quelques résultats intermédiaires

Lemme 3.21

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m)}\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(\gamma.z, z)\mathrm{d}\mu(z) = \sum_{j\geq 1} h(\frac{r_j}{T})\lambda_j(m).$$

Preuve :
Ce lemme se déduit très facilement de la décomposition spectrale du noyau automorphe obtenu à partir de k_T par une intégration sur un domaine fondamental de la surface de Riemann $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ •

Lemme 3.22 *Si γ est un élément hyperbolique alors :*

$$k(\gamma) = Inf_{z\in\mathbf{H}^2} u(\gamma.z, z) = |Tr(\gamma)|^2 - 4.$$

PREUVE :
Comme $u(\gamma.z, z) = u(\sigma\gamma.z, z)$, on a $k(\gamma) = k(\sigma\gamma\sigma^{-1})$ et on peut légitimement supposer que $\gamma.z = \alpha^2 z$ où $\alpha > 1$. On remarque enfin que :

$$u(\gamma.z, z) = \Big(\alpha - \frac{1}{\alpha}\Big)^2\Big(\frac{|z|}{\Im z}\Big)^2 = (|Tr(\gamma)|^2 - 4)\Big(\frac{|z|}{\Im z}\Big)^2$$

ce qui assure le résultat •

3.4.3 Preuve du théorème C

Théorème 3.23 (Théorème C) *Pour $\epsilon > 0$, $T \geq 2$, $n < 2T$ premier avec q, on a :*

$$\sum_{\sqrt{\lambda_j}\leq T} |\lambda_j(n)|^2 \ll_\epsilon \Big(\sum_{d|n} d\Big)T^2 + n^{4+\epsilon}T.$$

PREUVE DU THÉORÈME C :
On note :

1. $$N_T(n) = \sum_{j\geq 1} h(\frac{r_j}{T})|\lambda_j(n)|^2.$$

2. $$M_T(m) = \sum_{j\geq 1} h(\frac{r_j}{T})\lambda_j(m) \quad (m \geq 1).$$

Le lemme 3.14 implique que :

$$N_T(n) = \sum_{d|n} dM_T(\frac{n^2}{d^2}). \tag{3.35}$$

Estimons $M_T(m)$ pour $1 \leq m < 4T^2$. Le lemme 3.21 entraîne que :

$$M_T(m) = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m)} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_\mathcal{R})} k_T(\gamma.z, z)\mathrm{d}\mu(z).$$

Soit $\gamma = x_0 + x_1\omega + (x_2 + x_3\omega)\Omega$ dans $\mathcal{R}(m)$. Ainsi, $\Phi(\gamma) = \sqrt{m}A(\gamma)$ où $A(\gamma)$ est dans $SL_2(\mathbf{R})$.
Supposons que $A(\gamma)$ est parabolique ou que $A(\gamma) = 1_2$.
Ainsi, $\frac{2|x_0|}{\sqrt{m}} = 2$ donc $m = x_0^2$. Comme γ est de norme m, on a :

$$ax_1^2 + bx_2^2 - abx_3^2 = 0.$$

Ceci entraîne que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ car la $\mathbf{Q}$-forme quadratique $q(X_0, \ldots, X_3) = X_0^2 - aX_1^2 - bX_2^2 + abX_3^2$ ne représente pas 0. En effet, q admet un zéro global si et seulement si q admet toujours un zéro local. Il est clair que q représente 0 sur $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$. Ensuite, on sait que q représente 0 sur $\mathbf{Q}_p$ si et seulement si $(-1, -d(q))_p = \epsilon(q)$ où :

1. $d(q) = -(ab)^2$.
2. $\epsilon(q) = (a,b)_p^3$.

Ainsi, q représente 0 sur $\mathbf{Q}_p$ si et seulement si $1 = (a,b)_p$. Or, on rappelle qu'il existe un nombre fini non nul de premiers p tels que $(a,b)_p = -1$. Ce sont exactement les premiers caractéristiques. On a donc $\Phi(\gamma) = \pm\sqrt{m}\,1_2$ et m est un carré parfait. En fait, on peut dire qu'il n'y a pas beaucoup d'éléments paraboliques dans $\mathcal{R}(m)$. En notant s la fonction caractéristique des entiers carrés, on a :

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m) parabolique} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(\gamma.z,z)\mathrm{d}\mu(z) = s(m)k_T(0)\mu(\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})) \ll s(m)T^2.$$

Supposons que $A(\gamma)$ est hyperbolique.
Comme $|Tr(A(\gamma))| > 2$, on a $x_0^2 > m$ donc $|x_0| \geq \sqrt{m+1}$. Réinjectons cette nouvelle information dans la trace de $A(\gamma)$:

$$|Tr(A(\gamma))| = \frac{2|x_0|}{\sqrt{m}} \geq 2\sqrt{1+\frac{1}{m}} > 2 + \frac{1}{m}.$$

Le lemme 3.22 assure alors que $u(\gamma.z,z) \geq \frac{4}{m} > \frac{1}{T^2}$ donc $k_T(u(\gamma.z,z)) = 0$. Les éléments hyperboliques de $\mathcal{R}(m)$ ne contribuent donc pas du tout :

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m) hyperbolique} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(\gamma.z,z)\mathrm{d}\mu(z) = 0.$$

Supposons que $A(\gamma)$ est elliptique.
On peut écrire $Tr(A(\gamma)) = 2\cos\theta$ où $0 < \theta < \pi$. Comme dans le cas hyperbolique, on peut montrer que $|Tr(A(\gamma))| < 2 - \frac{1}{m}$. Comme le noyau k_T est positif, on a :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(u(\gamma.z,z))\mathrm{d}\mu(z) \leq \int_{\mathbf{H}^2} k_T(u(\gamma.z,z))\mathrm{d}\mu(z).$$

Le corollaire 3.20 implique que :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(u(\gamma.z,z))\mathrm{d}\mu(z) \leq T\int_0^{+\infty} \frac{g(rT)\cosh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh r - \cos 2\theta}\mathrm{d}r.$$

Utilisant le fait que g est à support compact inclus dans $[-1,+1]$, on a :

$$\int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(u(\gamma.z,z))\mathrm{d}\mu(z) \leq \frac{T}{2}\int_{-1}^{+1} ||g||_\infty \frac{\cosh\left(\frac{r}{2}\right)}{\sin\theta^2}\mathrm{d}r \ll mT.$$

On a donc :

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m) elliptique} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(\gamma.z,z)\mathrm{d}\mu(z) = \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m) elliptique, \exists z, u(\gamma.z,z)\leq 1} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(\gamma.z,z)\mathrm{d}\mu(z)$$

Le théorème 3.1 assure alors que :

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(m) elliptique} \int_{\mathcal{D}(\Gamma_{\mathcal{R}})} k_T(\gamma.z,z)\mathrm{d}\mu(z) \ll_\epsilon mTm^{1+\epsilon}.$$

Au final, on obtient que si $m < T^2$ alors :

$$M_T(m) \ll_\epsilon s(m)T^2 + m^{2+\epsilon}T.$$

Finissons la preuve de ce théorème. L'équation 3.35 assure que :

$$N_T(n) \ll_\epsilon \Big(\sum_{d|n} d\Big)T^2 + n^{4+2\epsilon}\Big(\sum_{d|n} \frac{1}{d^{3+2\epsilon}}\Big)T.$$

L'allure de la fonction h plus grande que 1 sur $[0,T]$ achève la preuve •

3.4.4 Preuve des théorèmes D et E

Mettons en place quelques notations. On pose :

1. $$F = \mathbf{Q}(\sqrt{a}) \subset \mathbf{R}.$$

2. $$S(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2) = \left\{z \in \mathbf{H}^2, \exists (c,\eta) \in \mathbf{Z} \times \mathcal{O}_F, \overline{\eta} bz^2 + cz + \eta = 0\right\}.$$

Les points de $S(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2)$ s'appellent pour des raisons profondes les points à multiplication complexe (C.M. en abrégé) de la surface de Riemann et on peut montrer que cet ensemble est dense dans cette surface arithmétique. Si z est dans $S(\Gamma_{\mathcal{R}} \setminus \mathbf{H}^2)$ alors $-D = c^2 - 4b\eta\overline{\eta} \in \mathbf{Z}_-$. Ainsi, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ est un corps quadratique imaginaire et on note Δ son discriminant. On construit un entier n_0 de la faon suivante :
On choisit un idéal premier $\tilde{a}$ de degré 1 c'est-à-dire de norme 1 et décomposé dans toute classe d'idéaux de $\mathcal{O}_K$. On admet que cela est possible. On pose alors :

$$n_0 = \prod_{\tilde{a}, \tilde{a} \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}} p.$$

Les théorèmes D et E se déduisent tous les deux de la proposition suivante :

Proposition 3.24 *On suppose que :*

1. *n a tous ses facteurs premiers décomposés dans K ie $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1\, si\, p|n$,*
2. *n est strictement divisible par n_0 ie $n = n_0 n_1$ où $n_0 \wedge n_1 = 1$,*

alors :

$$N_T(n,z) = \sum_{j\geq 1} h(\frac{r_j}{T})|\lambda_j(n)|^2|\Phi_j(z)|^2 \gg \sum_{d|n} d\tau(\frac{n^2}{d^2})T^2.$$

PREUVE :
On note :

$$M_T(m,z) = \sum_{j\geq 1} h(\frac{r_j}{T})\lambda_j(m)|\Phi_j(z)|^2 = \sum_{\gamma \in \mathcal{R}(m)} k(\gamma.z, z).$$

Le lemme 3.14 implique que :

$$N_T(n,z) = \sum_{d|n} dM_T(\frac{n^2}{d^2}, z)$$

Il s'agit donc d'estimer $M_T(m,z)$ pour $m=\frac{n^2}{d^2}$ où $d|n$.

$$M_T(m,z) \geq k_T(O)\, card\left\{\gamma \in \mathcal{R}(m), \gamma.z = z\right\} \gg T^2\, card\left\{\gamma \in \mathcal{R}(m), \gamma.z = z\right\}.$$

On note :

$$\nu_D(m) = card(E_D(m)) = card\left\{(t,u) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z},\, t^2 + Du^2 = 4m\right\}.$$

On remarque que si (t,u) est dans $E_D(m)$ alors $\gamma_{(t,u)} = \begin{pmatrix} \frac{t+cu}{2} & \eta u \\ -\overline{\eta} bu & \frac{t-cu}{2} \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{R}(m)$ et vérifie $\gamma.z = z$. Ainsi,

$$M_T(m,z) \gg T^2 \nu_D(m).$$

Il s'agit donc d'estimer $\nu_D(m)$. On remarque que $m = m_0 m_1$ où :

1. $m_0 \wedge m_1 = 1$.
2. m est un carré modulo Δ.
3. tous les facteurs premiers de m_1 sont décomposés dans K.
4. tous les facteurs premiers de m_0 sont de degré 1.

On admet que dans cette situation, $\nu_D \gg \tau(m_1 \geq \frac{1}{\tau(\frac{n_0^2}{d_0^2})}\tau(m)$. Au final :

$$\nu_D(m) \gg \tau(m)$$

ce qui finit la preuve •
Prouvons par exemple le théorème D.

Théorème 3.25 (Théorème D) *Pour une infinité de j, on a :*

$$||\Phi_j||_\infty \gg \sqrt{\ln(\ln \lambda_j)}.$$

PREUVE DU THÉORÈME D :
Il s'agit de prendre pour n :

$$n = \prod_{p<Y, p\in P} p$$

où Y est choisi suffisamment grand de sorte que $n_0|n$. La multiplicativité des fonctions arithmétiques suivantes assurent que :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} d &= \prod_{p<Y,p\in P} (p+1). \\ \sum_{d|n} d\tau(\frac{n^2}{d^2}) &= \prod_{p<Y,p\in P} (p+3). \end{aligned}$$

On a alors :

$$r(n) = \frac{\sum_{d|n} d\tau(\frac{n^2}{d^2})}{\sum_{d|n} d} \gg \ln Y \gg \ln m.$$

On choisit T de sorte que $n < 4T^2$. La proposition 3.24 assure que si $T^{\frac{1}{4}} < m$, on a :

$$\sum_{r_j<T^2} h(\frac{r_j}{T})|\lambda_j(n)|^2|\Phi_j(z)|^2 \gg \ln(\ln m) \sum_{r_j<T^2} h(\frac{r_j}{T})|\lambda_j(n)|^2.$$

Ainsi, il existe $r_{_0} < T^2$ vérifiant :

$$|\Phi_{j_0}(z)|^2 \gg \ln(\ln m) \gg \ln(\ln T) \gg \ln(\ln r_{j_0}).$$

Ainsi,

$$|\Phi_{j_0}(z)| \gg \ln(\ln \lambda_{j_0}). \tag{3.36}$$

En fait, il existe une infinité de tels j vérifiant 3.36. Pour cela, supposons le contraire et notons j_1 le plus petit de ces entiers vérifiant 3.36. En prenant $T = r_{j_1}$ et en appliquant ce qui précède, on contredit le statut de j_1 •
Ce théorème B possède comme consq́uence le fait que les vecteurs propres de carré intégrable du Laplacien hyperbolique ne sont pas uniformément bornés. Ce théorème coincide aussi avec la des résultat de type grande déviation. On peut de la même méthode prouver le théorème E :

Théorème 3.26 (Théorème E) *Si z et n sont comme dans la proposition 3.24 alors :*

$$\sum_{\sqrt{\lambda_j} \leq T} |\Phi_j(z)|^2 \lambda_j(n)^2 \gg \sum_{d|n} \tau(\frac{n}{d^2}) T^2.$$

Chapitre 4

Cas de $SL_2(\mathbf{Z})$

4.1 Introduction

Il s'agit de prouver le théorème B (et donc le théorème A) dans le cas de $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$. La principale différence avec le cas d'une algèbre de quaternions est l'existence d'une pointe en l'infini pour la surface de Riemann qui est la compactifiée de $\Gamma \setminus \mathbf{H}^2$. Toutes les estimations uniformes en z du chapitre précédent n'ont aucune chance de l'être à présent et il s'agit de rajoutter un contrôle pour y grand qui résultera naturellement d'un développement de Fourier en l'infini des formes cuspidales.
Rappelons sans rentrer dans les détails l'expression des opérateurs de Hecke pour $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$. On définit pour tout entier n :

$$\mathcal{R}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}),\, ad - bc = n \right\}.$$

Les opérateurs de Hecke sont alors :

$$T_n(f)(z) == \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(1) \setminus \mathcal{R}(n)} f(\alpha.z).$$

On retrouve les mêmes propriétés pour ces opérateurs que dans le cas d'une algèbre de quaternions :

Théorème 4.1 (Opérateurs de Hecke et composition) *Pour m et n entiers, on a :*

$$T_n \circ T_m = \sum_{d\,|m \wedge n} d T_{\frac{nm}{d^2}}$$

Ainsi, l'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke est commutative et engendrée par les T_p pour p premier. De plus, les opérateurs de Hecke sont autoadjoint pour le produit scalaire de Petterson.

Théorème 4.2 (Les opérateurs de Hecke sont autoadjoints) *Si n est entier alors $T_n = T_n^*$.*

On travaille de nouveau avec le noyau étudié en détail dans la section 3.3.1. La décomposition spectrale du noyau automorphe associé à k s'écrit :

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma.w) &= \sum_j h(r_j)\overline{\Phi_j(w)}\Phi_j(z) + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}} h(r)E_\infty(z,\frac{1}{2}+ir)\overline{E_\infty(w,\frac{1}{2}+ir)}\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Comme les opérateurs de Hecke sont hermitiens et commutent avec le Laplacien hyperbolique, on peut supposer que $(\Phi_j)_{j\geq 1}$ est une base orthonormée de formes cuspidales qui sont vecteurs propres des opérateurs de Hecke et du Laplacien hyperbolique. De faon plus précise, on pose :

$$T_n\Phi_j = \lambda_j(n)\Phi_j\,(n\wedge q=1) \tag{4.2}$$
$$-\Delta\Phi_j = \lambda_j\Phi_j \tag{4.3}$$
$$\lambda_j = \frac{1}{4}+r_j^2. \tag{4.4}$$

En appliquant l'opérateur de Hecke T_n à l'équation 4.1, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(n)} k(\gamma.z,w) &= \sum_j h(r_j)\overline{\Phi_j(w)}\lambda_j(n)\Phi_j(z) + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}} h(r)\eta_r(n)E_\infty(z,\frac{1}{2}+ir)\overline{E_\infty(w,\frac{1}{2}+ir)}\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $\eta_r(n)=\sum_{ab=n}\frac{a}{b}^r$.

4.2 Résultat fondamental de comptage bis

Pour z dans $\mathbf{H}^2$, n entier naturel, δ réel strictement positif, on pose :

1. $$M(z,n,\delta)=card\,\{\gamma\in\mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z)<\delta.\}.$$
2. $$M_1(z,n,\delta)=card\left\{\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z)<\delta,\, c\geq 1.\right\}.$$
3. $$M_2(z,n,\delta)=card\left\{\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\in\mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z)<\delta.\right\}.$$

Théorème 4.3 (HYPER IMPORTANT)

$$M_2(z,n,\delta) \ll_\epsilon (1+\sqrt{n\delta}y)n^\epsilon. \tag{4.6}$$
$$M_1(z,n,\delta) \ll_\epsilon (n(\delta+1))^\epsilon(1+n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}}))\,si\,\delta+\sqrt{\delta}\leq 1. \tag{4.7}$$

PREUVE :
On peut supposer que z est dans le domaine fondamental canonique $\mathcal{D}(\Gamma)$ pour lequel $|\Re z|\leq\frac{1}{2}$ et $\Im z\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Estimons d'abord $M_2(z,n,\delta)$.
Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est dans $M_2(z,n,\delta)$ alors :

$$u(\gamma.z,z) = \frac{|(a-d)z+b|^2}{4ny^2} < \delta.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |(a-d)x+b| &< 2\sqrt{n\delta}y. \\ |a-d| &< 2\sqrt{n\delta}. \end{aligned}$$

En écrivant $|b| = |b+(a-d)x-(a-d)x|$, on obtient par inégalité triangulaire :

$$|b| < 2\sqrt{n\delta}(y+|x|).$$

On obtient donc au final que :

$$M_2(z,n,\delta) < \sum_{a|n}(1+\sqrt{n\delta}(y+|x|)) \ll \tau(n)(1+\sqrt{n\delta}y).$$

Estimons maintenant $M_1(z,n,\delta)$.
Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans $M_1(z,n,\delta)$ alors :

$$u(\gamma.z,z) = \frac{|az+b-z(cz+d)|^2}{ny^2} < \delta.$$

Comme $ad-bc=n$, on a :

$$(cz+d)(cz-a)+n = c\left[(cz+d)z-(az+b)\right].$$

Ainsi,

$$|(cz+d)(cz+a)+n| = |c|y\sqrt{nu(\gamma.z,z)}.$$

Or, $|cz+d|^2-(cz+d)(2cx+d-a)| = -(cz+d)(cz+a)$. On obtient donc :

$$|n-|cz+d|^2+(cz+d)(2cx+d-a)| = |c|y\sqrt{nu(\gamma.z,z)}. \tag{4.8}$$

En prenant la partie imaginaire dans l'équation 4.8, on arrive à :

$$|\frac{a-d}{2}-cx| < \frac{\sqrt{n\delta}}{2}. \tag{4.9}$$

De même pour la partie réelle,

$$|n-|cz+d|^2+(cx+d)(2cx+d-a)| < |c|y\sqrt{n\delta}. \tag{4.10}$$

Continuons nos estimations :

$$|\sqrt{n}-|cz+d|| = \frac{|n-|cz+d|^2|}{\sqrt{n}+|cz+d|}.$$

Ainsi,

$$|\sqrt{n}-|cz+d|| \leq \frac{|n-|cz+d|^2+(cz+d)(2cx+d-a)|+|cz+d||2cx+d-a|}{\sqrt{n}+|cz+d|}.$$

Les équations 4.9 et 4.10 impliquent que :

$$(4.11) \qquad |\sqrt{n} - |cz+d|| \leq 2\sqrt{n\delta}.$$

On continue :

$$||\frac{a+d}{2} + icy| - \sqrt{n}| = ||\frac{a-d-2cx}{2} + cz + d| - \sqrt{n}|.$$

Les équations 4.9 et 4.11 impliquent que :

$$(4.12) \qquad ||\frac{a+d}{2} + icy| - \sqrt{n}| \leq \frac{\sqrt{n\delta}}{2} + 2\sqrt{n\delta} = \frac{5}{2}\sqrt{n\delta}.$$

Il nous reste à établir une dernière équation :

$$cy = |ciy| \leq |ciy + \frac{a-d}{2}| - \sqrt{n} + \sqrt{n} + |\frac{d-a}{2}|.$$

On arrive donc à :

$$cy \ll c|x| + \sqrt{n(\delta+1)}.$$

Aini,

$$c \ll \frac{y}{y-|x|}\frac{1}{y}\sqrt{n(\delta+1} \ll \frac{y}{y-\frac{1}{2}}\frac{1}{y}\sqrt{n(\delta+1}.$$

Comme l'application $y \mapsto \frac{y}{y-\frac{1}{2}}$ est bornée sur $[\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$, on obtient :

$$(4.13) \qquad c \ll y^{-1}\sqrt{n(\delta+1)}.$$

On pose $A = \frac{a-d}{2}$ et $D = \frac{a+d}{2}$. L'équation 4.9 s'écrit alors :

$$(4.14) \qquad A = cx + \mathcal{O}(\sqrt{n\delta}).$$

L'équation 4.12 s'écrit :

$$(4.15) \qquad D^2 + c^2y^2 = n + \mathcal{O}(n(\delta + \sqrt{\delta})).$$

On a aussi :

$$(4.16) \qquad ad - bc = n.$$

L'équation 4.13 s'écrit :

$$(4.17) \qquad 1 \leq c \ll y^{-1}\sqrt{n(\delta+1)}.$$

On appelle $\mathcal{E}$ le système formé par les équations 4.14 à 4.17. Notons pour la suite $rac(l)$ la racine carrée de la partie carrée de l. Etant donnés c et D vérifiant les équations 4.15 et 4.17, il y a au plus $\mathcal{O}(L^\epsilon(1 + \frac{rac(c_0)}{c}\sqrt{n\delta}))$ choix de A vérifiant 4.14 et 4.16 où $L = n(\delta+1)$ et $c_0 = (D^2 - n) \wedge c$. En effet, il y a $\mathcal{O}(c^\epsilon rac((D^2-n) \wedge c))$ solutions à la congruence 4.16 soit au plus $\mathcal{O}(L^\epsilon rac(c_0))$ solutions à cette congruence. L'équation 4.14 oblige à ces solutions d'être des entiers compris dans un intervalle du type $[-\frac{c}{2} - \mathcal{O}(\sqrt{n\delta}), \frac{c}{2} + \mathcal{O}(\sqrt{n\delta})]$ qui contient $c + 2\mathcal{O}(\sqrt{n\delta})$ entiers. Ainsi, le nombre de choix possibles pour A est

$Min(\mathcal{O}(L^\epsilon rac(c_0)), c+\mathcal{O}(\sqrt{n\delta}))$ soit au plus $\mathcal{O}(L^\epsilon(1+\frac{rac(c_0)}{c}\sqrt{n\delta}))$. Le nombre de solutions du système $\mathcal{E}$ est donc au plus :

$$S = \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n(\delta+\sqrt{\delta}))\ 1\leq c \ll \sqrt{L}} L^\epsilon\Big(1+\frac{rac((D^2-n)\wedge c)}{c}\sqrt{n\delta}\Big).$$

Il s'agit alors d'estimer S. On pose pour simplifier $\Delta = \delta + \sqrt{\delta}$. On a successivement :

$$S = L^\epsilon \sum_{c_0\geq 1} \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n\Delta)\ 1\leq c\ll\sqrt{L}\ (D^2-n)\wedge c = c_0} \Big(1+\frac{rac(c_0)}{c}\sqrt{n\delta}\Big).$$

$$S = L^\epsilon \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n\Delta)\ 1\leq c\ll\sqrt{L}} \sum_{c_0\,|\,c\ D^2-n\equiv 0[c_0]} \Big(1+\frac{rac(c_0)}{c}\sqrt{n\delta}\Big).$$

On peut donc écrire $S = \mathrm{L}^\epsilon\,(S_1+S_2)$ où :

1. $$S_1 = \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n\Delta)\ 1\leq c\ll\sqrt{L}} \sum_{c_0\,|\,c\ D^2-n\equiv 0[c_0]} 1$$

2. $$S_2 = \sqrt{n\delta} \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n\Delta)\ 1\leq c\ll\sqrt{L}} \sum_{c_0\,|\,c} \frac{rac(c_0)}{c} \sum_{D^2-n\equiv 0[c_0]} 1.$$

Estimons S_1 pour commencer.
On a :

$$S_1 \leq \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n\Delta)} \sum_{c_0\,|\,c\ D^2-n\equiv 0[c_0]} 1.$$

D'une part,

$$\sum_{c_0\,|\,c\ D^2-n\equiv 0[c_0]} 1 \leq \tau(c) \ll_\epsilon c^\epsilon \ll L^{\frac{\epsilon}{2}}.$$

D'autre part, le lemme 3.8 assure que :

$$card\left\{(c,D)\in\mathbf{Z}^2,\ D^2+c^2y^2 = n+\mathcal{O}(n\Delta)\right\} \ll_\epsilon n^{\frac{\epsilon}{2}}(n\sqrt{\Delta}+1).$$

Ainsi, on obtient :

$$S_1 \ll_\epsilon (Ln)^{\frac{\epsilon}{2}}(n\sqrt{\Delta}+1).$$

Or, $(Ln)^{\frac{\epsilon}{2}}(n\sqrt{\Delta}+1) = L^\epsilon\frac{n\sqrt{\Delta}+1}{(\delta+1)^{\frac{\epsilon}{2}}} \ll_\epsilon L^\epsilon(1+n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}}))$. Au final :

$$S_1 \ll_\epsilon L^\epsilon(1+n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}})). \tag{4.18}$$

Estimons maintenant S_2.
Le nombre de D vérifiant $D^2-n\equiv 0[c_0]$ est :

$$\mathcal{O}_\epsilon(c_0^\epsilon rac(n\wedge c_0)).$$

Le nombre de D vérifiant $D^2+c^2y^2 = n+\mathcal{O}(n\Delta)$ est :

$$\mathcal{O}_\epsilon(n^\epsilon(n\sqrt{\Delta}+1)).$$

Ainsi, on a :

$$\sum_{D^2-n\equiv 0[c_0]} \sum_{D^2+c^2y^2=n+\mathcal{O}(n\Delta)} 1 \ll_\epsilon L^\epsilon\Big[1+\sqrt{n}\frac{\delta^{\frac{1}{4}}+\delta^{\frac{1}{2}}}{rac(c_0)}\Big].$$

On peut donc écrire $S_2 \ll_\epsilon L^\epsilon(S_{2,1}+S_{2,2})$ où :

1. $$S_{2,1} = \sqrt{n\delta}\sum_{l^2m\leq L}\frac{l}{l^2m}$$

2. $$S_{2,2} = \sqrt{n\delta}\sqrt{n}(\delta^{\frac{1}{4}}+\delta^{\frac{1}{2}})\sum_{c_0|c\ 1\leq c\ll\sqrt{L}}\frac{1}{c}.$$

Estimons $S_{2,2}$.

$$S_{2,2} = n(\delta+\delta^{\frac{3}{4}})\sum_{c_0|c\ 1\leq c\ll\sqrt{L}}\frac{1}{c} \leq n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}}\sum_{1\leq c\ll\sqrt{L}}\frac{\tau(c)}{c}.$$

Au final,

$$S_{2,2} \ll_\epsilon n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}}. \tag{4.19}$$

Estimons $S_{2,1}$.
On a :

$$S_{2,1} = \sqrt{n\delta}\sum_{l^2m\ll\sqrt{L}}\frac{1}{lm} = \sqrt{n\delta}\sum_{l^2\ll\sqrt{L}}\frac{1}{l}\sum_{m\ll\frac{\sqrt{L}}{l^2}}\frac{1}{m}.$$

En majorant la série harmonique, on obtient :

$$S_{2,1} \ll \sqrt{n\delta}\sqrt{L}\ln L$$

soit au final :

$$S_{2,1} \ll_\epsilon n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}})L^\epsilon. \tag{4.20}$$

Les estimations 4.19 et 4.20 assurent que :

$$S_2 \ll_\epsilon L^\epsilon n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}}). \tag{4.21}$$

Les estimations 4.18 et 4.21 impliquent que :

$$S \ll_\epsilon L^\epsilon(1+n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}})).$$

4.3 Bornes supérieures

4.3.1 Estimation du noyau automorphe

On travaille de nouveau avec le noyau étudié en détail dans la section 3.3.1. Seule l'estimation finale du noyau automorphe change et devient :

Théorème 4.4 (Estimation finale du noyau automorphe bis)

$$K(z,z) = \sum_{\gamma \in \mathcal{R}(n)} k(\gamma.z,z) \ll_\epsilon (T + n\sqrt{T} + (\sqrt{T}\sqrt{n} + T)y)n^\epsilon.$$

PREUVE :
Notons pour la suite de cette preuve $f(\delta) = \delta^{\frac{-1}{4}}(1+\delta)^{\frac{-5}{4}}$. Cette application est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et a pour dérivée $f'(\delta) = \frac{-1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\right)$.
On a :

$$K(z,z) = \sum_{\gamma \in \mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z) \leq n^{-4}} k(u(\gamma.z,z)) + \sum_{\gamma \in \mathcal{R}(n), u(\gamma.z,z) > n^{-4}} k(u(\gamma.z,z)).$$

On obtient comme dans le chapitre précédent :

$$K(z,z) \ll TM(z,n,n^{-4}) + \sqrt{T}[f(\delta)M(z,n,\delta)]_{n^{-4}}^{+\infty} - \sqrt{T}\int_{n^{-4}}^{+\infty} f'(\delta)M(z,n,\delta)\mathrm{d}\delta = S_1 + S_2 + S_3.$$

Il s'agit alors d'estimer chacun de ces termes grâce au théorème 4.3. Commencons par S_1 :

$$S_1 \ll_\epsilon T\Big(n(\frac{1}{n^4} + 1)\Big)^\epsilon \Big(1 + n(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n})\Big) + Tn^\epsilon\Big(1 + \sqrt{n\frac{1}{n^4}y}\Big).$$

Ainsi,

$$S_1 \ll_\epsilon Tn^\epsilon(1+y). \tag{4.22}$$

Estimons S_2.

$$S_2 \ll_\epsilon \frac{\sqrt{T}}{n(1+n^{-4})^{\frac{5}{4}}}\Big[(n(\frac{1}{n^4}+1)^\epsilon(1 + n(\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n})) + n^\epsilon(1 + \sqrt{\frac{n}{n^4}y})\Big].$$

On en déduit que :

$$S_2 \ll_\epsilon n^\epsilon\sqrt{T}(n + \sqrt{n}y). \tag{4.23}$$

Estimons S_3.
On a $S_3 \ll_\epsilon S_{3,1} + S_{3,2}$ où :

1. $$S_{3,1} = \sqrt{T}\int_{n^{-4}}^{+\infty} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)n^\epsilon(1+\delta)^\epsilon(1 + n(\delta + \delta^{\frac{1}{4}}))\mathrm{d}\delta.$$

2. $$S_{3,2} = \sqrt{T}\int_{n^{-4}}^{+\infty} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)n^\epsilon(1 + \sqrt{n\delta}y)\mathrm{d}\delta.$$

Estimons $S_{3,2}$ pour commencer.

$$S_{3,2} = \sqrt{T}n^\epsilon\int_{n^{-4}}^{+\infty} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)\mathrm{d}\delta + \sqrt{T}n^\epsilon y\sqrt{n}\int_{n^{-4}}^{+\infty} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}\Big(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{1+\delta}\Big)\sqrt{\delta}\mathrm{d}\delta.$$

On en déduit que :

$$S_{3,2} \ll_\epsilon \sqrt{T}n^\epsilon(1+y\sqrt{n}). \tag{4.24}$$

Estimons $S_{3,1}$ pour conclure.

$$S_{3,1} = \sqrt{T}n^\epsilon \int_{n^{-4}}^{+\infty} \frac{1}{\delta^{\frac{1}{4}}(1+\delta)^{\frac{5}{4}}}(1+\delta)^\epsilon(1+n(\delta+\delta^{\frac{1}{4}}))\mathrm{d}\delta = \sqrt{T}n^\epsilon(\int_{n^{-4}}^{1} \dots \; + \; \int_{1}^{+\infty} \dots \;) = \sqrt{T}n^\epsilon(I+J).$$

En procédant de la même manière que dans le théorème 3.13, on montre que $I \ll n + n\ln n$ et $J \ll 1+n$ ce qui implique que :

$$S_{3,1} \ll_\epsilon \sqrt{T}n^\epsilon y\sqrt{n} + \sqrt{T}n^\epsilon(n+n\ln n). \tag{4.25}$$

Les estimations 4.22, 4.23, 4.24 et 4.25 achèvent la preuve •

4.3.2 Preuve du théorème A bis

On pose pour tout entier n, $\eta_j(n) = \frac{\lambda_j(n)}{\sqrt{n}}$.

Lemme 4.5

$$\eta_j(m)\eta_j(n) = \sum_{d|m\wedge n} \eta_j(\frac{mn}{d^2}).$$

La preuve est immédiate.

Lemme 4.6

$$\sum_{j\geq 1} h(r_j)|\Phi_j(z)|^2\eta_j(m)\eta_j(n) \;\leq\; \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\frac{mn}{d^2})} k(\gamma.z,z).$$

PREUVE DU LEMME 4.6 :
Notons S_1 la somme intervenant dans le membre de gauche de l'égalité ci-dessus. Le lemme 4.5 assure que :

$$S_1 = \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \sum_{j\geq 1} h(r_j)\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)}\lambda_j(\frac{mn}{d^2}).$$

Le théorème 2.14 assure le résultat car la contibution de la série d'Eisenstein en l'infini est positive •

Théorème 4.7 (Théorème A bis) *Pour* $\epsilon > 0$, $N, T \geq 1$ *et* $(\alpha_n)_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1}$ *une suite complexe, on a :*

$$\sum_{T\leq\sqrt{\lambda_j}\leq T+1} |\Phi_j(z)|^2 \,|\sum_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1} \alpha_n \frac{\lambda_j(n)}{\sqrt{n}}|^2 \quad \ll_\epsilon \quad N^\epsilon\Big[T(1+y)\sum_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1} |\alpha_n|^2 +$$
$$\sqrt{T}(N+y)\Big(\sum_{1\leq n\leq N,\, n\wedge q=1} |\alpha_n|\Big)^2\Big].$$

Preuve du théorème A bis :
On note :

$$S_2 = \sum_{j\geq 1} h(r_j)|\Phi_j(z)|^2 |\sum_{1\leq n\leq N} \alpha_n \eta_j(n)|^2;$$

Aprè avoir ouvert le carré et interverti les sommes, on arrive à :

$$S_2 = \sum_{1\leq m,n\leq N} \alpha_n \overline{\alpha_m} \sum_{j\geq 1} h(r_j)|\Phi_j(z)|^2 \eta_j(m)\eta_j(n).$$

Le lemme 4.6 assure alors que :

$$|S_2| \leq \sum_{1\leq m,n\leq N} \alpha_n \overline{\alpha_m} \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\frac{mn}{d^2})} k(\gamma.z, z).$$

Or, pour $d|m\wedge n$, le théorème 4.4 assure que :

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{R}(\frac{mn}{d^2})} k(\gamma.z,z) \ll_\epsilon \sum_{d|m\wedge n} \Big(\frac{mn}{d^2}\Big)^\epsilon \Big(T + \sqrt{T}\frac{mn}{d^2} + (\sqrt{T}\sqrt{\frac{mn}{d^2}} + T)y\Big).$$

On arrive donc à :

$$S_2 \ll_\epsilon \sum_{1\leq m,n\leq N} |\alpha_m \alpha_n \sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}} \Big(\frac{mn}{d^2}\Big)^\epsilon \Big[T + \sqrt{T}\frac{mn}{d^2} + (\sqrt{T}\sqrt{\frac{mn}{d^2}} + T)y\Big].$$

Ainsi, on peut écrire $|S_2| \ll_\epsilon N^\epsilon \sqrt{T}\Big\{\sqrt{T}S_1 + S_2 + yS_3 + y\sqrt{T}S_4\Big\}$ où :

1. $$S_1 = \sum_{1\leq m,n\leq N} |\alpha_m\alpha_n| \Big(\sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}}\Big)$$

2. $$S_2 = \sum_{1\leq m,n\leq N} |\alpha_m\alpha_n| \Big(\sum_{d|m\wedge n} \frac{\sqrt{mn}}{d}\Big)$$

3. $$S_3 = \sum_{1\leq m,n\leq N} |\alpha_m\alpha_n| \Big(\sum_{d|m\wedge n} 1\Big)$$

4. $$S_4 = \sum_{1\leq m,n\leq N} |\alpha_m\alpha_n| \Big(\sum_{d|m\wedge n} \frac{d}{\sqrt{mn}}\Big)$$

Les mêmes arguments que dans le théorème A assurent que :

$$\begin{aligned}
S_1 &\ll_\epsilon N^\epsilon \sum_{1\leq N} |\alpha_n|^2 \\
S_2 &\ll_\epsilon N^{1+\epsilon} \Big(\sum_{1\leq N} |\alpha_n|\Big)^2 \\
S_3 &\ll_\epsilon N^\epsilon \Big(\sum_{1\leq N} |\alpha_n|\Big)^2 \\
S_4 &\ll_\epsilon N^\epsilon \sum_{1\leq N} |\alpha_n|^2
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve $\bullet$

4.3.3 Contrôle d'une forme cuspidale en la pointe infini

Dans cette section, on note Φ une forme cuspidale. L'objectif de cette section est de contrôler $\Phi(z)$ lorsque $\Im z$ est grande. Ce contrôle était inutile dans le cas d'une algèbre de quaternions pour laquelle z restait borné.

Polygône standart

Pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $SL_2(\mathbf{R})$, on note :

$$C_\gamma = \{z \in \mathbf{C}, |j(\gamma, z)| = |cz + d| = 1\}.$$

Si $c \neq 0$ alors C_γ est le cercle euclidien de centre $\frac{-d}{c}$ et de rayon $\frac{1}{|c|}$. De plus, γ agit sur C_γ comme une isométrie euclidienne car :

$$|\gamma.z - \gamma.w| = \frac{|z - w|}{|j(\gamma, z) j(\gamma, w)|} = |z - w| \,\mathrm{si}\, (z, w) \in C_\gamma^2.$$

C_γ s'appelle le cercle isométrique de γ. On remarque que :

$$\frac{d}{dz}(\gamma.z) = \frac{1}{(cz + d)^2}.$$

$(cz + d)^{-2}$ s'appelle la déformation de γ en z. L'intérieur de C_γ est l'ensemble des points de déformation supérieure à 1 et l'extérieur de γ est l'ensemble des points de déformation inférieure à 1. On note :

1. $$\mathcal{D}(\Gamma_\infty) = \{z = x + iy,\, 0 < x < 1,\, y > 0\}.$$

2. $$\tilde{\mathcal{D}(\Gamma)} = \{z \in \mathcal{D}(\Gamma_\infty),\, \Im z > \Im(\gamma.z) \forall \gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty\}.$$

$\tilde{\mathcal{D}(\Gamma)}$ est un domaine fondamental de Γ appelé polygône standart. C'est l'ensemble des points de la bande $\mathcal{D}(\Gamma_\infty)$ de déformation inférieure à 1.

Un lemme utile

Lemme 4.8 *Si z est dan le demi-plan de Poincaré et $Y > 0$ alors :*

$$card\left\{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma,\, \Im(\sigma_\infty^{-1}\gamma.z) > Y\right\} < 1 + \frac{10}{c_\infty Y}\; où\, c_\infty = Min\left\{c > 0,\, \exists \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix} \in \sigma_\infty^{-1}\Gamma\sigma_\infty\right\} = 1.$$

PREUVE :
Notons E le cardinal à estimer. On peut bien sûr supposer que z est dans le polygône standart. Notons que :

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a :

$$card\left\{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma,\, \Im(\sigma_\infty^{-1}\gamma.z) > Y\right\} \leq 1 + card\left\{(c,d) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z},\, \Im(\sigma_\infty^{-1}\begin{pmatrix} 0 & * \\ c & d \end{pmatrix}.z) > Y\right\}.$$

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ avec $c > 0$. Comme z est dans le polygône standart et γ n'est pas dans Γ_∞ alors $|cz+d| \geq 1$ d'où $\frac{y}{|cz+d|^2} > Y$. On en déduit que :

1. $Y < y$.
2. $c < \frac{1}{yY}$.
3. $|cx+d| < \sqrt{\frac{y}{Y}}$.

On en déduit en estimant $|\frac{d}{c} - \frac{-x}{1}|$ que :

$$|d| < 2|c|(1 + \frac{1}{c_\infty}\sqrt{\frac{y}{Y}}).$$

Ainsi, si on note $E(C) = card\left\{(c,d), 0 < C \leq c < 2C,\, d \in \mathbf{Z},\, \Im(\sigma_\infty^{-1}\begin{pmatrix} 0 & * \\ c & d \end{pmatrix}.z) > Y\right\}$, on a :

$$E(C) \leq 4C^2(1 + \frac{1}{c_\infty}\sqrt{\frac{y}{Y}}) \leq \frac{10C^2}{c_\infty}\sqrt{\frac{y}{Y}}.$$

On choisit $C = C_n = \sqrt{2^{-n}\frac{1}{\sqrt{yY}}}$ où $n \geq 1$. On obtient :

$$E = \sum_{n \geq 1} E(C_n) \leq \frac{10}{C_\infty Y} \bullet$$

Jusqu'à la fin de cette section, on note Φ une forme cuspidale associée à la valeur propre $\lambda = \frac{1}{4} + r^2 = s(1-s)$ où $s = \frac{1}{2} + ir$. On rappelle que l'on a alors :

$$\Phi(\sigma_\infty.z) = \sum_{n \neq 0} \hat{\Phi_\infty}(n) 2\sqrt{y} K_{iy}(2\pi n y) e(nx).$$

Corollaire 4.9

$$\int_Y^{+\infty}\int_0^1 |\Phi(z)|^2 \mathrm{d}\mu(z) \ll 1 + \frac{1}{Y}.$$

PREUVE :

On peut supposer que Φ est normalisée c'est-à-dire de norme 2 égale à 1. Notons I cette intégrale. On a alors :

$$I = \int_{\mathcal{D}(\Gamma_\infty)} \chi_{\mathcal{D}(Y)}(z)|\Phi(z)|^2 \mathrm{d}\mu(z).$$

Dans l'égalité précédente, on a noté $\mathcal{D}(Y) = \{z = x+iy,\, 0 \leq x \leq 1,\, y \geq Y\}$. Comme $\mathcal{D}(\Gamma_\infty) = \coprod_{\gamma \in \Gamma} \gamma.\mathcal{D}(\Gamma)$, on obtient :

$$I = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma.\mathcal{D}(\Gamma)} \chi_{\mathcal{D}(Y)}(z)|\Phi(z)|^2 \mathrm{d}\mu(z).$$

Un changement de variables $z' = \gamma.z$ s'impose alors :

$$I = \int_{\mathcal{D}(\Gamma)} \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_{\mathcal{D}(Y)}(\gamma.z) \Big) |\Phi(z)|^2 \mathrm{d}\mu(z).$$

Or, le lemme 4.8 assure que :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_{\mathcal{D}(Y)}(\gamma.z) \leq card \left\{ \gamma \in \Gamma, \Im(\sigma_\infty^{-1}\gamma.z) > Y \right\} \ll 1 + \frac{10}{c_\infty Y} + 2 \ll 1 + \frac{1}{Y}$$

d'où le résultat •

Résultat final

Théorème 4.10 (Contrôle d'une forme cuspidale en l'infini)

$$|\Phi(z)| \ll \sqrt{\frac{r}{y}} ||\Phi||_2.$$

PREUVE :
L'égalité de Parseval assure que :

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{\Phi_\infty}(n)|^2 |W_s(iny)|^2 = \int_0^1 |\Phi(\sigma_\infty.z)|^2 \mathrm{d}x.$$

En intégrant l'égalité précédente multipliée par $\frac{1}{y^2}$ par rapport à y sur $[Y, +\infty[$ et en utilisant le corollaire 4.3.3, on obtient :

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{\Phi_\infty}(n)|^2 \int_Y^{+\infty} |\sqrt{y} K_{ir}(2\pi|n|y)|^2 \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \ll 1 + \frac{1}{Y}.$$

Le changement de variables $t = 2\pi|n|y$ entraîne que :

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{\Phi_\infty}(n)|^2 \int_{2\pi|n|Y}^{+\infty} |\sqrt{y} K_{ir}(t)|^2 \frac{1}{t} \mathrm{d}t \ll 1 + \frac{1}{Y}. \tag{4.26}$$

On a besoin du résultat suivant concernant les fonctions de Bessel :

$$\int_r^{+\infty} |K_{ir}(y)|^2 \frac{1}{y} \mathrm{d}y \gg r^{-1} \exp(-\pi r). \tag{4.27}$$

Les estimations 4.26 et 4.27 impliquent que si $N = \frac{r}{2\pi Y}$ alors :

$$\sum_{0 \neq |n| \leq N} |\hat{\Phi_\infty}(n)|^2 \ll \exp(\pi r)(r + N). \tag{4.28}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarzz appliquée au développement de Fourier de Φ en l'infini assure que :

$$|\Phi(z)|^2 \leq \Big(\sum_{n \neq 0} |\hat{\Phi_\infty}(n)|^2 (|n| + Y)^{-2} \Big) \Big(\sum_{n \neq 0} (|n| + Y)^2 y K_{ir}(2\pi|n|y)^2 \Big).$$

L'estimation 4.28 et le contrôle 2.9 de la fonction de Bessel en l'infini impliquent que :

$$|\Phi(z)|^2 \ll Y^{-2}(Y + r) y^{-1} (y^{-1} r + Y)^2.$$

Le choix pour Y de $\frac{r}{2\pi y}$ conclut la preuve •

4.3.4 Preuve du théorème B bis

Théorème 4.11 (Théorème B bis)

$$\forall j \geq 1, \forall \epsilon > 0, \, ||\Phi_j||_\infty \ll_\epsilon \lambda_j^{\frac{5}{24}+\epsilon}.$$

On fixe $j_0 \geq 1$ et on prend $T = r_{j_0}$. On définit une suite α_n pour n premier avec q et compris entre 1 et N par :

$$\alpha_n = \begin{cases} \eta_{j_0}(p) & \text{si } n = p \leq \sqrt{N} \text{ où } p \text{ est un nombre premier} \\ -1 & \text{si } n = p^2 \leq N \text{ où } p \text{ est un nombre premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que si p est un nombre premier alors :

$$\eta_{j_0}(p)^2 - \eta_{j_0}(p^2) = 1.$$

Le théorème A bis assure alors que :

$$|\Phi_{j_0}(z)|^2 \Big(\sum_{p \leq \sqrt{N}} \Big)^2 \ll_\epsilon N^\epsilon \Big\{ T(1+y) \Big(\sum_{p \leq \sqrt{N}} |\eta_{j_0}(p)|^2 + \sum_{p \leq \sqrt{N}} 1 \Big) + \sqrt{T}(N+y) \Big(\sum_{p \leq \sqrt{N}} |\eta_{j_0}(p)| + \sum_{p \leq \sqrt{N}} 1 \Big)^2 \Big\}.$$

On admet pour la suite de la preuve que :

$$\sum_{n \leq N} |\eta_{j0}(n)|^2 \ll_\epsilon N r_{j_0}^\epsilon.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarzz combinée avec le résultat précédent entraînent que :

$$\frac{|\Phi_{j_0}(z)|^2}{N^\epsilon} \ll_\epsilon T(1+y) \Big(\frac{\sqrt{N} T^\epsilon}{(\sum_{p \leq \sqrt{N}} 1)^2} + 1 \Big) + \sqrt{T}(N+y) \Big(\frac{N^{\frac{1}{4}} T^{\frac{\epsilon}{2}}}{\sqrt{\sum_{p \leq \sqrt{N}} 1}} + 1 \Big)^2.$$

Or, le théorème de Tchebitchev assure que :

$$\frac{\sqrt{N}}{\ln N} \ll \sum_{p \leq \sqrt{N}} 1 \ll \frac{\sqrt{N}}{\ln N}.$$

On aboutit donc à :

$$|\Phi_{j_0}(z)|^2 \ll_\epsilon (NT)^\epsilon \Big(\frac{T}{\sqrt{N}}(1+y) + (N+y)\sqrt{T} \Big).$$

On choisit $N = T^{\frac{1}{3}}$ pour avoir :

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll_\epsilon T^{\frac{4\epsilon}{6}+\frac{5}{12}} \sqrt{1 + y(1 + T^{\frac{-1}{3}})}.$$

On continue notre majoration sachant que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$:

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll_\epsilon T^{\epsilon + \frac{5}{12}} + \sqrt{y} T^{\epsilon + \frac{5}{12}} \sqrt{1 + T^{\frac{-1}{3}}}.$$

Or, $1 + a^{\frac{1}{3}} \ll a^{\frac{2}{3}}$ donc :

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll_\epsilon T^{\epsilon + \frac{5}{12}} + \sqrt{y} T^{\epsilon + \frac{1}{12}}. \tag{4.29}$$

On remarque que cette borne est petite lorsque y est petit. De plus, l'estimation obtenue à partir du développement de Fourier en l'infini (thórème 4.10) donne :

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{y}}. \tag{4.30}$$

Cette borne est petite lorsque y est grand. Les estimations 4.29 et 4.30 assurent que :

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll_\epsilon T^{\epsilon + \frac{5}{12}} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} T^{\epsilon + \frac{1}{12}}.$$

Il s'agit alors de minimiser la borne ci-dessus. Cela est réalisé lorsque $y = T^{\frac{5}{12} - \epsilon}$ ce qui donne :

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll_\epsilon T^{\epsilon + \frac{5}{12}} + T^{\frac{7}{24} + \frac{\epsilon}{2}}$$

ce qui entraîne que :

$$|\Phi_{j_0}(z)| \ll_\epsilon r_{j_0}^{\frac{5}{12} + \epsilon}.$$

Ceci finit la preuve •

Conclusion

Retenons que l'on a réussi à trouver une borne supérieure à la norme infinie de certains vecteurs propres de carré intégrable du Laplacien hyperbolique, à savoir une base orthonormée de Hecke, en étudiant des sommes spectrales ayant comme poids des polynômes en les valeurs propres de Hecke. On a donc brisé la borne locale par des moyens arithmétiques jusqu'à obtenir :

$$||\Phi||_\infty \ll_\epsilon \lambda^{\frac{5}{24}+\epsilon}. \tag{4.31}$$

Une amélioration conséquente de ce résultat serait de prouver la conjecture suivante :

$$||\Phi||_\infty \ll_\epsilon \lambda^{\epsilon}. \tag{4.32}$$

On peut se demander si trouver de telles bornes supérieures a des répercussions en théorie des nombres. En fait, il y a un lien étroit entre trouver de telles bornes supérieures et trouver des estimations de fonctions L sur la droite critique $\Re s = \frac{1}{2}$ dans le cas de $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$. Or, l'estimation de ces fonctions L sur leur droite critique a des conséquences en théorie des nombres. Par exemple, la conjecture 4.32 implique la conjecture de Lindelof pour la fonction dzéta de Riemann à savoir :

$$\forall \epsilon > 0,\, \zeta(\frac{1}{2}+it) = \mathcal{O}_\epsilon((1+|t|)^\epsilon). \tag{4.33}$$

Comme l'hypothèse très vraisemblable de Riemann implique l'hypothèse de Lindelof, tout porte à croire que la conjecture 4.32 est vraie. Donnons un dernier exemple de l'interaction entre bornes supérieures de tels vecteurs propres et estimations de fonctions L sur la droite critique. Notons $L(\Phi_j, s)$ la fonction L associé à la forme cuspidale Φ qui est dans la base orthonormée de Hecke. Si on note χ_4 le caractère de Dirichlet défini par :

$$\chi_4(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } p \equiv 1[4] \\ -1 & \text{si } p \equiv 3[4] \\ 0 & \text{si } p = 2 \end{cases}$$

alors on peut montrer que :

$$\frac{L(\Phi_j \otimes \chi_4, \frac{1}{2})\overline{L(\Phi_j, \frac{1}{2})}}{\cosh r_j} r_j^{-\epsilon} \ll_\epsilon \Phi_j(i) \ll_\epsilon \frac{L(\Phi_j \otimes \chi_4, \frac{1}{2})\overline{L(\Phi_j, \frac{1}{2})}}{\cosh r_j} r_j^{\epsilon}. \tag{4.34}$$

Ainsi, toute borne de Φ_j donne en retour une borne de $L(\Phi_j, \frac{1}{2})$ et vice-versa. Pour conclure, on constate donc qu'il y a un lien étroit entre vecteurs propres du Laplacien hyperbolique de surafces arithmétiques et théorie analytique des fonctions L et donc théorie des nombres. Dans ce rapport, on a exposé un résultat obtenu par des méthodes arithmétiques. Il serait peut-être profitable de trouver des bornes supérieures à partir de méthodes géométriques ou dynamiques qui auraient alors de profondes répercussions sur les fonctions L de Dirichlet.

Bibliographie

[1] M. Eichler : *Lectures on modular correspondences*, Tata Inst. **9**(1955).

[2] D. Hejhal : *The Selberg Trace Formula for* $PSL_2(\mathbf{R})$ Volume 548 of Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1976.

[3] D. Hejhal : *The Selberg Trace Formula for* $PSL_2(\mathbf{R})$ Volume 1135 of Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1985.

[4] H. Iwaniec : *The spectral growth of automorphic L-functions* J. Reine Angew. Math. **428**(1992),139-159.

[5] H. Iwaniec : *Small eigenvalues for* $\Gamma_0(N)$ Acta Arith. **LVI**(1990), 65-82.

[6] H. Iwaniec : *Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms* Revista Matematica Iberoamericana(1995).

[7] H. Iwaniec : *Topics in Classical Automorphic Forms* Volume 17 of American Mathematical Society(1997).

[8] H. Iwaniec et P. Sarnak : L^∞ *norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces* Annals of Mathematics **141**(1995), 301-320.

[9] S. Katok : *Fuchsian groups* University of Chicago Press(1992).

[10] H. Rose : *A course in number theory* Oxford Science Publications, Second edition, 1994.

[11] P. Sarnak *Arithmetic quantum chaos* First Annual R.A. Blyth Lectures(1993).

[12] J.-P. Serre : *A course in Arithmetic* Springer, New York, 1973.

[13] M.-F. Vigneras : *Arithmétique des algèbres de quaternions* Volume 800 of Lecture Notes in Math., Springer-Verlag.