Enseirb-Matméca
M1, 2016-2017

TD Analyse Numérique

TD 1 : Interpolation

Exercice 1 : Exemples basiques

1. Soit $f_1(x) = x^3$. Quel polynôme de degré 3 interpole f_1 aux points $(-\pi; 0; \mathrm{Ln}(3); \sqrt{e})$?

2. Expliquer pourquoi on étudie la qualité d'un polynôme d'interpolation uniquement sur des intervalles bornés.

3. Soit $f_2(x) = \cos(\pi x)$ sur $[-1, 1]$.

   (a) Déterminer le polynôme de degré 1 qui interpole f_2 aux points $(-1; 1)$. Que remarque-t-on?

   (b) Déterminer le polynôme de degré 2 qui interpole f_2 aux points $(-1; 0; 1)$.

Exercice 2 : Polynôme de Lagrange

1. Construire p, le polynôme de Lagrange de degré 3 qui interpole les points $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$.

2. Soit q le polynôme de Lagrange de degré 2 qui interpole les points $(-1, 1)$, $(0, 1)$ et $(1, 2)$. Sans faire de calcul, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) - q(x) = \lambda(x + 1)x(x - 1)$.

Exercice 3 : Différences divisées

On cherche à interpoler $f(x) = \frac{1}{1+2x}$ sur $[0, 1]$.

1. En utilisant les polynômes de la base de Lagrange, construire le polynôme de degré 2 qui interpole f aux points $(0; 0.5; 1)$.

2. Retrouver ce polynôme en utilisant la formule des différences divisées.

3. En évitant les calculs superflus, constuire le polynôme de degré 3 qui interpole f aux points $(0; 0.25; 0.5; 1)$.

Exercice 4 : Différences divisées et ordre des points

1. Construire p, le polynôme de degré 3 qui interpole les points $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(2, 1)$ par la méthode des différences divisées.

2. Sans refaire le tableau des différences divisées, vérifier qu'on retrouve bien le même polynôme quel que soit l'ordre des points.

Exercice 5 : Interpolation par morceaux

1. Soit $f \in C^1(-2, 2)$. Construire p_1 le polynôme de degré 1 qui interpole f aux points $(-2; 1)$, puis p_2 celui qui interpole f aux points $(0; 1)$.

2. On choisit d'approcher f par la fonction g qui vaut p_1 sur $[-2, 0)$ et p_2 sur $[0, 2]$. Que peut-on dire de g?

3. Proposer une solution pour rendre g continue. Peut-on s'assurer que g soit de classe C^1?

Exercice 6 : Un autre type d'interpolation

Pour $f \in C^1(-1,1)$, on cherche p, un polynôme de degré 4 tel que:

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1),$$
$$p'(-1) = f'(-1),\ p'(1) = f'(1).$$

1. Montrer que p existe et est unique.
2. Déterminer p en utilisant sa décomposition sur la base canonique.
3. Construire une base plus appropriée et donner l'expression de p sur celle-ci.

Exercice 7 : Calcul d'erreur

On considère $f(x) = \sqrt[3]{x}$ que l'on souhaite interpoler aux points $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 8$ et $x_3 = 27$.

1. En utilisant les différences divisées construire, pour $i = 0 \ldots 3$, p_i, le polynôme d'interpolation de degré i interpolant f aux points $(x_j)_{j \leq i}$.
2. Evaluer $p_i(20)$ et comparer à $f(20)$.
3. Ecrire le reste de l'interpolation dans ce cas. Que se passe-t-il?
4. Construire q_3 le polynôme de degré 3 interpolant f aux points $(x_i)_{i=1\ldots3}$ et calculer $q_3(20)$.
5. Ecrire le reste de l'interpolation dans ce cas. Que peut-on dire?

Exercice 8 : Interpolation d'Hermite

Soit $f \in C^1(-1,1)$. On cherche le polynôme d'Hermite de degré 3 qui interpole f et $f^{'}$ en -1 et en 1. On le notera p.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un tel polynôme en s'inspirant de la preuve pour les polynômes de Lagrange.
2. Construire p en utilisant les formules du cours.
3. Retrouver les 4 fonctions de la base d'Hermite d'après leur définition:

$$H_1^1(-1) = 1,\ H_1^1(1) = 0,\ (H_1^1)^{'}(-1) = 0,\ (H_1^1)^{'}(1) = 0,$$
$$H_2^1(-1) = 0,\ H_1^1(1) = 1,\ (H_2^1)^{'}(-1) = 0,\ (H_2^1)^{'}(1) = 0,$$
$$H_1^2(-1) = 0,\ H_1^2(1) = 0,\ (H_1^2)^{'}(-1) = 1,\ (H_1^2)^{'}(1) = 0,$$
$$H_2^2(-1) = 0,\ H_2^2(1) = 0,\ (H_2^2)^{'}(-1) = 0,\ (H_2^2)^{'}(1) = 1.$$

Exercice 9 : Algorithmes

1. Calculer la complexité de la construction d'un polynôme d'interpolation par les deux méthodes du cours. On considèrera que toutes les opérations élémentaires ont le même coût et l'évaluation d'une fonction un coût différent.
2. Ecrire l'algorithme de la méthode des différences divisées. On pourra remplir le tableau des différences divisées dans une matrice idoine.