Calcul scientifique en Fortran 90
TP Interpolation

Préambule

Dans ce TP, on étudiera différentes manières d'approcher une fonction f donnée par un polynôme.
La première façon est d'utiliser l'interpolation de Lagrange. Pour rappel, le polynôme d'interpolation de Lagrange est l'unique polynôme de degré m interpolant f en $m+1$ points (distincts).
Si on appelle $(y_i)_{i=0\ldots m}$ les points d'interpolation alors le polynôme d'interpolation correspondant est donné par la formule de Lagrange :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} f(y_i) l_i(x),$$

$$\text{avec } l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} \frac{x-y_j}{y_i-y_j}.$$

Ce même polynôme peut également s'obtenir en utilisant la formule des différences divisées :

$$p(x) = f(y_0) + \sum_{i=1}^{m} f[y_0, \ldots, y_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-y_j).$$

Première partie

1. Écrire un code qui contient :
   - Une fonction définissant la fonction f à interpoler.
   - Une procédure qui, étant donnés un intervalle de référence $[a,b]$ et m, remplit un tableau `yi` contenant $m+1$ points équirépartis sur $[a,b]$. Cette procédure doit également remplir un tableau contenant les valeurs de f évaluée en ces points. Ces deux tableaux doivent être des variables globales.

- Une fonction ayant un réel x en entrée et qui renvoie $p(x)$ calculé par la formule de Lagrange. Pour cette fonction, les deux tableaux de la question précédente sont supposés connus.
- Un programme principal qui calcule la valeur de p aux points $x_i = a + i * \dfrac{b-a}{1000}$, $i = 0 \ldots 1000$ et crée un fichier formaté contenant une colonne avec les x_i, une avec les $p(x_i)$ et une avec $|p(x_i) - f(x_i)|$.
  Ce programme principal fera appel aux sous-programmes des questions précédentes. Les valeurs des paramètres a, b et m devront être lus dans un fichier.
  Remarque : les points x_i ne sont pas les points d'interpolation !

2. Vérifier votre programme, puis utilisez-le pour différents polynômes d'interpolation avec $f(x) = \cos(x)$ sur $(-\pi, 3\pi)$ et $f(x) = \frac{x^3}{e^x-1}$ sur $(10^{-3}, 15)$.
3. Tracer les polynômes d'interpolation avec $f(x) = \sqrt{x}$. Que se passe-t-il ? Comment l'expliquer ?
4. Tracer les polynômes d'interpolation avec $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $b = -a = 5$ et $m = 5, 10, 15$ et 20. Que se passe-t-il ?
5. Plutôt que d'utiliser des points d'interpolation équirépartis, on peut choisir les points de Tchebytcheff. Pour rappel, ils sont donnés par :

$$y_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\Big(\frac{(2i-1)\pi}{m}\Big),$$

   Ecrire une procédure qui remplit le tableau `yi` avec les $m+1$ points de Tchebytcheff et le tableau `fyi` correspondant.
6. Tracer les polynômes d'interpolation avec les choix de f et de m des questions précédentes. Que constate-t-on ?

Deuxième partie

1. On souahite maintenant programmer la méthode des différences divisées, pour ce faire on va procéder en deux temps. Tout d'abord, créer une variable globale `coeff_dd` qui est un tableau de réels amené à contenir les coefficients $(f[x_0, \ldots, x_i])_{i=0\ldots m}$.
   Ecrire ensuite un sous-programme qui remplit ce tableau. Pour cela, on construira le tableau complet des différences divisées que l'on stockera dans une matrice (il y a deux manières de le faire). Puis on extraira les coefficients $(f[x_0, \ldots, x_i])_{i=0\ldots m}$.
2. Ecrire une fonction qui prend en entrée un réel x et renvoie la valeur de $p(x)$ calculée à partir de la formule des différences divisées (en supposant connu le tableau des coefficients).

3. Ecrire un programme principal qui calcule la valeur de p aux points $x_i = a + i * \frac{b-a}{1000}$, $i = 0 \dots 1000$ et crée un fichier formaté contenant une colonne avec les x_i, une avec les $p(x_i)$ et une avec $|p(x_i) - f(x_i)|$.
   Ces valeurs devront bien entendu être calculées avec la méthode des différences divisées. Par ailleurs, le tableau `coeff_dd` ne doit être rempli qu'une seule fois. Enfin, les valeurs des paramètres a, b et m devront également être lus dans un fichier.
4. Vérifier votre programme.
5. En se basant sur le sous-programme créé pour la première question de cette partie, écrire le sous-programme qui remplit le tableau des différences divisées étendu au cas du polynôme de Hermite et en extrait les coefficients pertients.
6. Grâce à ce sous-programme, écrire une fonction qui, à partir d'un réel x calcule $q(x)$ le polynôme de Hermite associé aux points de `yi`.
7. Tracer le polynôme de Hermite dans les exemples précédents. Que peut-on en dire ?

$\star$ Modifier le programme pour tracer la spline de degré 2 associée aux points de `yi`. Tracer le résultat et le comparer aux polynômes de Lagrange et de Hermite pour un même nombre de degrés de liberté. Que peut-on conclure ?