Chapitre 1 : fonctions holomorphes

Nous présentons dans ce chapitre les premières définitions et propriétés des fonctions holomorphes.

1. Rappels

1. Topologie sur $\mathbb{C}$.

La topologie qu'on considèrera sur $\mathbb{C}$ est celle associée à la norme usuelle $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

• La **boule ouverte** de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ est le disque centré en z_0 et de rayon r, noté $D(z_0, r)$, et défini par : $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

• Un **voisinage de** z_0 est un ensemble contenant une boule ouverte centrée en z_0.
On note $\mathcal{V}(z_0)$ l'ensemble des voisinages de z_0 : $U \in \mathcal{V}(z_0) \Leftrightarrow \exists r > 0 / D(z_0, r) \subset U$.

• Un **ouvert** de $\mathbb{C}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ voisinage de chacun de ses points. Un ensemble est fermé si son complémentaire est ouvert.

• Une **courbe** γ dans un ouvert D de $\mathbb{C}$ est une application continue de l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ dans D. On note $\gamma^\star = Im\gamma = \{\gamma(t), t \in [a, b]\}$.
Une courbe fermée est une courbe pour laquelle $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Un **chemin** est une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Un chemin fermé est un chemin pour lequel $\gamma(a) = \gamma(b)$.

• Un sous-ensemble D de $\mathbb{C}$ est **connexe** si pour tous ouverts U et V de $\mathbb{C}$ inclus dans D vérifiant $U \cup V = D$ et $U \cap V = \emptyset$ on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.
On peut alors montrer qu'un sous-ensemble D de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement si deux points quelconques de D peuvent être joints par un chemin contenu dans D. C'est la caractérisation qu'on utilise le plus souvent.

2. Isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la topologie usuelle, associée à la norme $||(x, y)|| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. L'application Φ définie sur $\mathbb{C}$ par $\Phi(z = x + iy) = (x, y)$ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Si f est une fonction définie dans $\mathbb{C}$ au voisinage d'un point z, la fonction $f \circ \Phi^{-1}$ est définie dans $\mathbb{R}^2$ au voisinage du point (x, y). Nous pourrons donc voir toute fonction définie sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ comme une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Si $z = x + iy$ est un point de $\mathbb{C}$ nous écrirons $f(z)$ lorsque nous nous intéresserons aux propriétés "complexes" de f et $f(x, y)$ lorsque nous nous intéresserons aux propriétés "réelles" de f. Si f est définie dans $\mathbb{C}$ il faudra lire $f \circ \Phi^{-1}(x, y)$ lorsqu'on écrira $f(x, y)$. Inversement si f définie dans $\mathbb{R}^2$, il faudra lire $f \circ \Phi(z)$ lorsqu'on écrira $f(z)$. Cet abus de notation permettra d'alléger les écritures.

2. Définitions-propriétés

On rappelle qu'une fonction est continue en un point x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Cette condition s'écrit :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0/|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

et ne fait intervenir que des valeurs absolues (si on travaille avec des variables réelles) ou des modules (si x_0 est un élément de $\mathbb{C}$).

De même la notion de dérivabilité dans $\mathbb{R}$ ne s'exprime qu'en terme de valeurs absolues. En considérant les variables dans $\mathbb{C}$ et non plus dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant les valeurs absolues par des modules, on obtient la notion de dérivabilité (ou différentiabilité) dans $\mathbb{C}$:

Définition 1. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 si $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.*

On pose alors $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Le nombre $f'(z_0)$ est appelé dérivée de f en z_0. C'est un nombre complexe indépendant de la façon dont z tend vers z_0 : si $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet deux limites différentes lorsque z tend vers z_0 sur deux chemins distincts, f n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en z_0. Ainsi, la fonction identité : $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point de $\mathbb{C}$ alors que la fonction conjuguée : $z \mapsto \overline{z}$ n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point de $\mathbb{C}$ puisque pour tout dans $\mathbb{R}^\star$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\overline{z_0 + t} - \overline{z_0}}{(z_0 + t) - z_0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{\overline{z_0 + it} - \overline{z_0}}{(z_0 + it) - z_0} = -1.$$

Définition 2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction est holomorphe sur D si elle est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point de D.*

On peut noter que les fonctions holomorphes sont toujours définies sur un **ouvert** de $\mathbb{C}$. Les fonctions constantes et la fonction identité sont des exemples de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Proposition 1. *Si f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0, f est continue en z_0.*

<u>Démonstration :</u> La $\mathbb{C}$-différentiabilité d'une fonction f en un point z_0 s'écrit :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + o(|z - z_0|).$$

Ainsi : $\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f'(z_0) + o(|z - z_0|) = 0$. La fonction f est donc continue en z_0. ∎

Proposition 2. *Si f et g sont deux fonctions $\mathbb{C}$-différentiables en z_0, les fonctions $f+g$ et fg sont $\mathbb{C}$-différentiables en z_0 avec : $(f+g)'(z_0) = f'(z_0)+g'(z_0)$ et $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$.*

Démonstration : $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} (g(z)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0})$.

L'application g est continue en z_0 d'après la proposition 1 et les applications f et g sont holomorphes en z_0 par hypothèse. Ainsi : $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} g(z)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = g(z_0)f'(z_0)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = f(z_0)g'(z_0)$. ■

La proposition 2 exprime que **l'ensemble $\mathcal{O}(D)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif.**

Proposition 3. *Soient f et g deux fonctions $\mathbb{C}$-différentiables en z_0, $g(z_0)\neq 0$. Alors le quotient $\frac{f}{g}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 et $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(f(z_0))^2}$.*

Démonstration : D'après la proposition 2 il suffit de montrer que la fonction $\frac{1}{g}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 avec $(\frac{1}{g})'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$.

Par hypothèse, la fonction g ne s'annule pas au voisinage de z_0 : la fonction $\frac{1}{g}$ est définie au voisinage de z_0.

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{\frac{1}{g(z)}-\frac{1}{g(z_0)}}{z-z_0} = -\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \left(\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\frac{1}{g(z_0)g(z)}\right) = -\frac{g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

■

Proposition 4. *Si f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 et g est $\mathbb{C}$-différentiable en $f(z_0)$, la fonction $g\circ f$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 et $(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Démonstration : On a l'égalité : $\displaystyle\frac{g\circ f(z)-g\circ f(z_0)}{z-z_0} = \frac{g\circ f(z)-g\circ f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

D'après la proposition 1 : $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ et donc, puisque g est $\mathbb{C}$-différentiable en $f(z_0)$, il vient :

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{g\circ f(z)-g\circ f(z_0)}{f(z)-f(z_0)} = g'(f(z_0)).$$

Enfin : $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$. ■

3. Conditions de Cauchy-Riemann

Soit f une fonction $\mathbb{C}$-différentiable en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ de $\mathbb{C}$. En considérant maintenant f comme une fonction de deux variables réelles (voir 2) des rappels), la condition $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + o(|z - z_0|)$, vraie au voisinage de z_0, s'écrit :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (a_0(x - x_0) - b_0(y - y_0), a_0(y - y_0) + b_0(x - x_0)) + o(||(x - x_0, y - y_0)||)$$

pour (x, y) au voisinage de (x_0, y_0). On a évidemment posé $f'(z_0) = a_0 + ib_0$. Ceci montre que f est différentiable en (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, l'application $(h, k) \mapsto (a_0h - b_0k, a_0k + b_0h)$ étant $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Nous rappelons que les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont alors définies par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

En considérant des nombres complexes de la forme $z = x + iy_0$ nous avons :

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

De même, en considérant $z = x_0 + iy$, il vient :

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ainsi, si f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0, f est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_0, y_0) et les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) vérifient l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Réciproquement : si f est une fonction $\mathbb{R}$-différentiable en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ et si les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) vérifient l'équation (1), il vient :

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(||(x, y) - (x_0, y_0)||) \\ &= (x - x_0 + i(y - y_0))\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(||(x, y) - (x_0, y_0)||) \end{aligned}$$

et donc, en revenant à une écriture complexe (voir 2) des rappels) :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(|z - z_0|),$$

ce qui montre que f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 de dérivée $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Nous savons que si u et v sont les parties réelle et imaginaire de f (u et v sont alors deux fonctions d'une variable complexe, à valeurs dans $\mathbb{R}$), la $\mathbb{R}$-différentiabilité de f est équivalente à la $\mathbb{R}$-différentiabilité des fonctions u et v. Nous venons ainsi de démontrer la proposition suivante :

Proposition 5. *Une fonction $f = u + iv$ est $\mathbb{C}$-différentiable en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ de $\mathbb{C}$ si et seulement si u et v sont $\mathbb{R}$-différentiables en (x_0, y_0) et vérifient les conditions suivantes, appelées conditions de Cauchy-Riemann :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{array}\right.$$

On a de plus : $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Définissons les deux opérateurs différentiels $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ par :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Si $f = u + iv$ est une fonction $\mathbb{R}$-différentiable en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x_0, y_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\right)\right] \end{aligned}$$

Nous avons donc :

Théorème 1. *Une fonction f est $\mathbb{C}$-différentiable en un point z_0 de $\mathbb{C}$ si elle est $\mathbb{R}$-différentiable au point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(x_0, y_0) = 0$. *Sa dérivée en z_0 est alors donnée par :* $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0)$.

4. Applications-Exemples

Nous nous proposons dans cette partie de donner quelques exemples de fonctions holomorphes.

Nous avons vu, comme application directe de la définition 1, que l'application identité est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

• La proposition 2 entraîne que tout polynôme de la variable z (c'est-à-dire toute fonction f de la forme $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ où $a_0, ..., a_n$ sont des nombres complexes) est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

• La proposition 3 montre alors que toute fraction rationnelle en z (quotient de deux polynômes en z) est holomorphe en dehors de l'ensemble des zéros de son dénominateur.

• La proposition 5 montre qu'une fonction définie sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, à valeurs réelles, non constante, n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point de D.

En effet, si on écrit $f = u + iv$ l'hypothèse donne que v est identiquement nulle sur D. D'après la proposition 5, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ sont nulles sur D. Ainsi, D étant connexe, u (et donc f) est constante sur D.

• Qu'en est-il des séries entières complexes ?

On rappelle qu'une série entière complexe est une fonction de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes. On associe à toute série complexe un unique élément r de $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, appelé rayon de convergence de la série : s'il est non nul, il est tel que la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout complexe z dans le disque $D(0,r)$ (avec la convention $D(0,\infty) = \mathbb{C}$). Il faut noter qu'on peut définir formellement une série $\sum a_n z^n$ (c'est une écriture) mais cette série ne définira une fonction qu'aux points où elle converge.

Proposition 6. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $r > 0$. La fonction $f : z \mapsto \sum a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,r)$ et on a pour tout z dans $D(0,r)$:*

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

<u>Démonstration :</u> Le critère de d'Alembert montre que la série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge absolument en tout point z de $D(0,r)$.

Soit z_0 un point quelconque de $D(0,r)$, r' un réel inférieur strict à r tel que z_0 appartienne à $D(0,r')$ et z un point quelconque de $D(0,r')$.

$$f(z) - f(z_0) = \sum_{n\geq 0} a_n(z^n - z_0^n) = \sum_{n\geq 1} a_n(z^n - z_0^n) = (z - z_0)\sum_{n\geq 1} a_n(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}).$$

La série $\sum n|a_n|(r')^{n-1}$ étant convergente, la série $\sum a_n(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1})$ converge normalement en z. Ainsi :

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n\geq 1} a_n(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}) = \sum_{n\geq 1} a_n \lim_{z\to z_0}(\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-k-1}) = \sum_{n\geq 1} n a_n z_0^{n-1}.$$

■

Ainsi la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, de rayon de convergence infini, définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ (voir exercice 1) et la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$ est holomorphe sur $D(0,1)$.

Il est souvent commode de travailler avec des séries définies non pas dans un voisinage de l'origine mais au voisinage d'un point quelconque de $\mathbb{C}$:

Définition 3. *On dit qu'une fonction f est analytique en z_0 s'il existe un réel strictement positif r et une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes tels que la série $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge sur $D(z_0,r)$ et $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ pour tout z dans $D(z_0,r)$.*

On montre alors, de manière identique à la proposition 6 :

Proposition 7. *Toute fonction analytique en z_0 est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0.*

On aurait aussi pu déduire la proposition 6 de la proposition 7 en montrant que toute série entière, de rayon de convergence $r>0$, est analytique en tout point de $D(0,r)$ (faire la démonstration en exercice).

Nous allons appliquer ce résultat à l'étude de l'holomorphie d'une fonction définie par une intégrale.

Définition 4. *Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue au voisinage de $\gamma^\star$. On définit l'intégrale de f le long de γ, notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ par :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

On peut noter qu'il n'y a pas de problème de définition du terme de droite dans l'égalité précédente, la fonction $t\mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ étant continue par morceaux sur l'intervalle compact $[a,b]$ par hypothèse.

Il faut avoir une représentation géométrique de cette notion : on calcule l'intégrale en parcourant le chemin de $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$ à la vitesse $\gamma'(t)$. Il n'est donc pas équivalent d'intégrer la fonction de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$ (on intégre le long de γ) ou de l'intégrer de $\gamma(b)$ vers $\gamma(a)$ (on intègre le long de $-\gamma$).

Cependant, l'intégrale ne doit pas dépendre de la paramétrisation du chemin, c'est-à-dire de la vitesse à laquelle on parcourt $\gamma^\star$. Ce résultat est formulé plus précisément dans le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit γ_1 et γ_2 deux chemins définis respectivement sur deux intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ de $\mathbb{R}$, tels que $\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi$ où φ est une application continue strictement croissante de $[a,b]$ dans $[c,d]$. Si f est une fonction continue au voisinage de $\gamma_1^\star(=\gamma_2^\star)$, on a :*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Démonstration : D'après la définition 4, on a :
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_a^b f(\gamma_2\circ\varphi)(t)(\gamma_2\circ\varphi)'(t)dt.$$
Puisque $(\gamma_2\circ\varphi)'(t) = \gamma_2'(\varphi(t))\varphi'(t)$ et φ est un changement de variables, il vient :
$$\int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt = \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt.$$
■

Nous avons alors la proposition suivante :

Proposition 8. *Soit γ un chemin de $\mathbb{C}$. La fonction $F : z \mapsto \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$.*

Démonstration :

Soit z_0 un point quelconque de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$ et $r > 0$ tel que le disque $D(0, r)$ soit inclus dans $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$.
$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) + (z_0 - z)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 - \frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}\right)^{-1}.$$
La condition $\left|\frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}\right| < 1$ étant vérifiée pour tout z dans $D(z_0, r)$ et tout ζ dans $\gamma^\star$, la fonction $z \mapsto \left(1 - \frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}\right)^{-1}$ est analytique en z, de développement :
$$\left(1 - \frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z_0 - z}{\zeta - z_0}\right)^n.$$
Cette série étant normalement convergente en z sur le disque $D(0, r)$, on peut intervertir l'ordre de l'intégration et de la sommation. Ainsi :
$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n\geq 0}\left(\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right)(z_0 - z)^n.$$
La fonction F est donc analytique en z_0 et la proposition 7 entraîne que F est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0. Ceci étant vrai pour tout point de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$, F est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$. ■

Nous utiliserons cette fonction F dans le chapitre 2 pour donner une représentation intégrale des fonctions holomorphes. Une telle représentation permettra de montrer que toute fonction $\mathbb{C}$-différentiable en un point z_0 de $\mathbb{C}$ est analytique en z_0. Nous aurons ainsi montré l'équivalence des notions d'holomorphie et d'analyticité.

Planche d'exercices n°1

Exercice 1 : Fonction exponentielle

On définit la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ par : $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

a. Rappeler pourquoi exp est bien définie sur $\mathbb{C}$ et vérifier : $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.

b. En considérant $\exp(tz)$ comme une série entière en t, démontrer la relation : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \exp(z+z') = \exp z \exp z'$.

c. En déduire : $|\exp(z)| = e^{Rez}$ et $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.

d. Soit z_0 un nombre complexe. Calculer : $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0}$. La fonction exp est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

e. Montrer que si y est un réel, on a : $\exp(iy) = \cos y + i \sin y$.

f. Retrouver le résultat de la question d en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann.

g. On définit les fonctions :

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2},\ \sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$
$$chz = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2},\ shz = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.$$

Démontrer de deux façons différentes que ces quatre fonctions sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :

Soit f une fonction holomorphe non constante sur le disque $D(0, r)$. Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(z)}$ n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point de $D(0, r)$ et que la fonction $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $D(0, r)$.

Exercice 3 :

Les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, sont-elles holomorphes ?

$$f(x, y) = x - iy \qquad g(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$h(x, y) = \exp(\overline{z}) \qquad k(x, y) = e^x(x \cos x - y \sin y + i(x \sin y + y \cos x)).$$

Exercice 4 :

a. Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. Montrer que u et v sont deux fonctions harmoniques sur D, c'est-à-dire solutions sur D de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

b. Démontrer que si la fonction réelle u est harmonique sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, la fonction f définie sur D par $f(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ est holomorphe sur D.

Exercice 5 :

a. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$. Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est constante
ii) $Re(f)$ est constante
iii) $Im(f)$ est constante
iv) $|f|$ est constante