Chapitre 2 : Propriétés générales

I. Formule intégrale de Cauchy

Le but de cette partie est d'établir une formule intégrale pour les fonctions holomorphes, c'est-à-dire de montrer que toute fonction holomorphe s'écrit comme l'intégrale d'une certaine fonction. Nous en déduirons l'analyticité de toute fonction holomorphe et aurons ainsi montré l'équivalence entre "fonction holomorphe" et "fonction analytique".

Nous allons commencer par quelques propriétés de la fonction $\frac{1}{2i\pi}F$ définie au chapitre 1. Cette fonction dépendant du chemin γ considéré, nous la noterons Ind_γ.

Proposition 1. *Soit γ un chemin fermé de $\mathbb{C}$. L'application Ind_γ vérifie les propriétés suivantes :*
(i) *elle est holomorphe sur $\mathcal{C}\backslash\gamma^\star$*
(ii) *elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$*
(iii) *elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$*
(iv) *elle est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$.*

On peut noter qu'il existe bien une seule composante non bornée de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$. En effet, le chemin γ étant fermé, l'ensemble $\gamma^\star$ est borné dans $\mathbb{C}$. Il existe donc un disque D contenant $\gamma^\star$. L'ensemble $\mathbb{C}\backslash D$ est alors connexe et inclus dans $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$. Il est donc inclus dans une seule composante de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$.

Démonstration de la proposition : la partie (i) a été démontrée dans la proposition 8 du chapitre 1.

Partie (ii) : il suffit de montrer que : $\exp(\displaystyle\int_\gamma \frac{dw}{w-z}) = 1$. Si h est la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par : $h(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt$, cela revient à montrer que $\exp(h(1)) = 1$. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ avec $h'(\alpha) = \dfrac{\gamma'(\alpha)}{\gamma(\alpha)-z}$. Ainsi :

$$((\gamma(\alpha)-z)\exp(-h(\alpha)))' = 0 \quad \text{sur } [0,1],$$

sauf éventuellement en un nombre fini de points. Puisque $h(0) = 0$, il vient :

$$\forall \alpha \in [0,1], \quad \exp h(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha)-z}{\gamma(0)-z}$$

et donc, en utilisant la condition $\gamma(0) = \gamma(1)$:

$$\exp h(1) = 1.$$

Partie (iii) : La fonction Ind_γ étant holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$, elle est continue sur cet ensemble et à valeurs discrètes d'après la partie (ii). Elle est donc constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$.

Partie (iv) : La fonction Ind_γ étant constante sur la composante non bornée E_∞ de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$ d'après la partie (iii), il suffit de montrer qu'il existe un point z_0 de E_∞ tel que $Ind_\gamma(z_0) = 0$. Pour tout point z dans E_∞, on a :

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt.$$

La fonction γ étant de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que $\sup_{[0,1]}|\gamma'| \leq C$. Soit alors z_0 dans E_∞ tel que $\inf_{t\in[0,1]}|\gamma(t) - z| > C$. Il vient : $|Ind_\gamma(z_0)| \leq \dfrac{1}{2\pi} < 1$ et donc : $Ind_\gamma(z_0) = 0$. ■

Un chemin fermé γ délimite un ouvert, non nécessairement connexe (penser à un ∞). Le chemin définit alors la frontière de ce domaine. On dit que le chemin parcourt le bord d'une composante dans le "sens direct" si cette composante se trouve sur notre gauche quand on parcourt le chemin. On peut noter que rien n'interdit à un chemin de parcourir la frontière plusieurs fois dans le sens direct et dans le sens indirect. L'indice $Ind_\gamma(z)$ calcule alors le nombre de tours (comptés positivement dans le sens direct et négativement dans le sens indirect) que fait le chemin γ autour du point z de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$.

Exemples : 1. Le chemin $\gamma_1(t) = a + e^{2i\pi t}$ parcourt la frontière $bD(a,r)$ de $D(a,r)$ une fois dans le sens direct : $Ind_{\gamma_1}(0) = 1$.

2. Le chemin $-\gamma_1$ défini par $-\gamma_1(t) = a + re^{-2i\pi t}$ parcourt $bD(a,r)$ une fois dans le sens indirect : $Ind_{-\gamma_1}(0) = -1$.

3. Le chemin γ_2 défini par $\gamma_2(t) = a + re^{4i\pi t}$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma_2(t) = a + re^{-8i\pi t}$ pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ parcourt $bD(a,r)$ une fois dans le sens direct et deux fois dans le sens indirect : $Ind_{\gamma_2}(0) = 1 - 2 = -1$.

4. Si γ est un chemin fermé de $\mathbb{C}$ et si z appartient à la composante non bornée de $\mathbb{C}\backslash\gamma^\star$, γ ne s'enroule pas autour de z et donc $Ind_\gamma(z) = 0$.

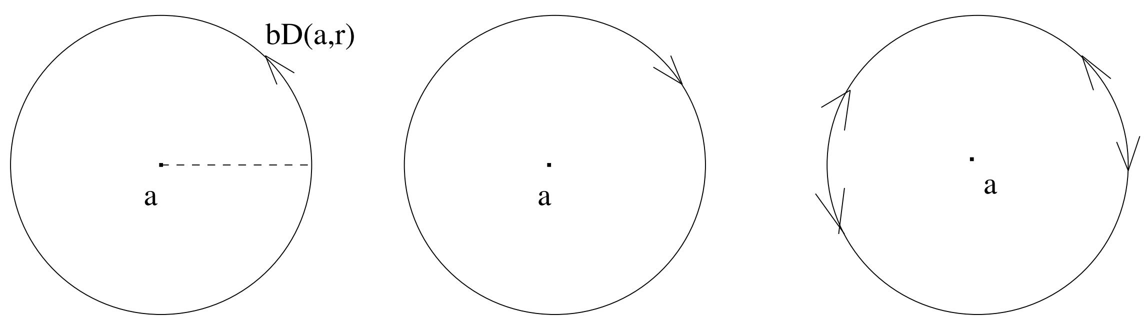

FIGURE 1. Exemples **1,2,3**

Lorsque le chemin γ décrit le cercle de centre a et de rayon r on a :

Proposition 2. *Soit a un point de $\mathbb{C}$ et γ le chemin défini par $\gamma(t) = a + re^{2i\pi t}$. On a :*

$$Ind_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z \in D(a,r) \\ 0 & \text{si} \quad z \notin D(a,r) \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 2 : D'après la proposition (ii), pour tout point z du disque on a :

$$Ind_\gamma(z) = Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-a} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{2i\pi e^{2i\pi t}}{e^{2i\pi t}}dt = 1.$$

Si $z \in D(a,r)$, on applique la partie (iv) de la proposition 1. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir une formule de représentation des fonctions holomorphes.

Définition 1. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction f définie sur U admet une primitive sur U s'il existe une fonction F holomorphe sur U telle que pour tout z dans U : $F'(z) = f(z)$.*

L'existence de primitives entraîne :

Proposition 3. *Soit γ un chemin fermé dans un ouvert U de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue au voisinage de $\gamma^\star$, admettant une primitive sur U. Alors $\int_\gamma f(w)dw = 0$.*

Démonstration : Soit γ un chemin inclus dans U. Par définition :

$$\int_\gamma f(w)dw = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si F est une primitive de f, l'application $t \in [0,1] \mapsto (F\circ\gamma)(t)$ est dérivable sur $[0,1]$ et $(F\circ\gamma)'(t) = \gamma'(t)F'(\gamma(t))$. Ainsi :

$$\int_\gamma f(w)dw = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Si le chemin γ est fermé, il vient alors $\int_\gamma f(w)dw = 0$. ■

Nous savons que l'intégrale d'une fonction dépend généralement du chemin d'intégration considéré. Dans la démonstration précédente, nous avons montré que si γ est un chemin (pas nécessairement fermé) reliant un point z_0 à un point z_1, alors $\int_\gamma f(w)dw = F(z_1) - F(z_0)$. L'intégrale ne dépend donc pas du chemin choisi pour aller de z_0 à z_1.

Nous disposons ainsi d'un moyen pour prouver qu'une fonction n'admet pas de primitive sur un ouvert de $\mathbb{C}$: il suffit de trouver un chemin fermé dans cet ouvert tel que l'intégrale de la fonction sur ce chemin ne soit pas nulle.

Exemples : 1. Tout polynôme admet une primitive définie sur $\mathbb{C}$.

2. Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $U\backslash\{0\}$. En effet soit $r > 0$ tel que le cercle de centre 0 et de rayon r soit inclus

dans U. Si γ est défini sur $[0,1]$ par $\gamma(t) = re^{2i\pi t}$, il vient :

$$\int_{\gamma^\star} \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = 2i\pi.$$

Notation : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, connexe, simplement connexe (ie "sans trou") et f une fonction continue au voisinage de U. Si la frontière bU de U définit un chemin fermé (on dit que l'ouvert U est à frontière de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on notera $\int_{bU} f$ l'intégrale de f sur le chemin fermé tracé sur bU dans le sens direct. Par exemple, si $U = D(a,r)$, $\int_{bD(a,r)} f = \int_\gamma f$ où $\gamma(t) = a + re^{2i\pi t}$ et si $U = \{z = (x,y) \in \mathbb{C}/a < x < b, c < y < d\}$, $\int_{bU} f = \int_\gamma f$ où γ est le chemin allant de (a,c) à (b,c), puis de (b,c) à (b,d) puis de (b,d) à (a,d) et enfin de (a,d) à (a,c).

Nous avons vu (proposition 3) que l'on avait des renseignements sur l'intégrale d'une fonction dès que celle-ci admettait une primitive au voisinage de ce chemin. Il est alors naturel de déterminer des domaines sur lesquels toute fonction holomorphe admet une primitive :

Proposition 4. *Soit $D(a,r)$ le disque centré en un point a de $\mathbb{C}$ de rayon r. Toute fonction holomorphe sur $D(a,r)$ admet une primitive sur $D(a,r)$.*

Conséquence : pour tout chemin γ inclus dans $D(a,r)$: $\int_\gamma f = 0$.

Démonstration de la proposition 4 : Considérons la fonction F_{hv} définie sur $D(a,r)$ par $F_{hv}(z) = \int_{\gamma_{hv}} f(w)dw$, où γ_{hv} est l'union du segment horizontal joignant $a = (x_0, y_0)$ à (x, y_0) et du segment vertical joignant (x, y_0) à $z = (x,y)$ (hv = horizontal-vertical). La fonction F_{hv} est $\mathbb{R}$-différentiable sur $D(a,r)$ (considéré comme ouvert de $\mathbb{R}^2$) puisque $F_{hv}(x,y) = \int_{x_0}^x f(t,y_0)dt + i\int_{y_0}^y f(x,t)dt$. Sa dérivée partielle par rapport à y vaut $\dfrac{\partial F_{hv}}{\partial y}(x,y) = if(x,y)$. Considérons de même le chemin γ_{vh} union du segment vertical joignant (x_0,y_0) à (x_0,y) et du segment horizontal joignant (x_0,y) à (x,y), et la fonction $F_{vh}(z) = \int_{\gamma_{vh}} f(w)dw$. Elle vérifie : $\dfrac{\partial F_{vh}}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$.

Hypothèse ($\star$) "Les fonctions F_{hv} et F_{vh} sont égales."

Supposons l'hypothèse $\star$ vérifiée. On a alors : $\dfrac{\partial F_{hv}}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$ et donc $\dfrac{\partial F_{hv}}{\partial z}(x,y) = f(z)$: la fonction F_{hv} est holomorphe, de dérivée f. Ceci donne la proposition 4.

Il reste à vérifier l'hypothèse ($\star$). Cette hypothèse, qui peut s'écrire $\int_{\gamma_{hv}} f(w)dw = \int_{\gamma_{vh}} f(w)dw$, exprime le fait que l'intégrale sur le bord d'un rectangle d'une fonction holomorphe au voisinage de ce rectangle est nulle; c'est le lemme de Goursat :

Lemme 1. *Si f est une fonction holomorphe au voisinage d'un rectangle R, alors :*

$$\int_{bR} f(w)dw = 0.$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Divisons le rectangle R en quatre rectangles identiques. Intégrer sur le rectangle R revient à intégrer sur le bord de chacun des quatre rectangles dans le sens direct. Soit $I_R(f)$ l'intégrale de f le long de bR. L' intégrale sur l'un des quatre rectangles est de module supérieur ou égal à $|I_R(f)|/4$. Notons R^1 l'un des rectangles correspondants. En réitérant ce procédé au rectangle R^1, on peut construire une suite $(R^j)_j$ de rectangles emboités, tels que pour tout j : $|I_{R^j}(f)| \geq \frac{1}{4^j}|I_R(f)|$. L'intersection $\cap_{j\geq 0}R^j$ étant réduite à un point z_0, on a :

$$\forall \delta > 0, \exists j_\delta \ / \ \forall j \geq j_\delta, \forall z \in R^j, |z - z_0| < \delta.$$

La fonction f étant holomorphe en z_0, il vient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Ainsi, pour tout $j \geq j_\delta$, on a :

$$|I_{R^j}(f)| = |\int_{\gamma_j} f(z)dz| \leq |\int_{\gamma_j} (f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0))dz| + \varepsilon \int_{\gamma_j} |z - z_0|dz.$$

Les fonctions $z \mapsto 1$ et $z \mapsto z$ admettant des primitives sur $\mathbb{C}$, il vient :

$$\int_{\gamma_j} f(z_0)dz = \int_{\gamma_j} f'(z_0)(z - z_0)dz = 0.$$

Finalement $|I_{R^j}(f)| < \varepsilon \int_{\gamma_j} |z - z_0|dz$. Si l est la longueur du rectangle R, le rectangle R^j, obtenu à la j-ième étape, est de longueur $\frac{l}{2^j}$ et la distance entre z_0 et un point quelconque de bR^j est strictement inférieure à $\frac{l}{2^{j+1}}$ (demi-longueur du rectangle). Ainsi :

$$|I_R(f)| < \varepsilon 4^j \frac{l}{2^j} \frac{l}{2^{j+1}} < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $I_R(f) = 0$.

Le lemme de Goursat étant maintenant démontré, l'hypothèse $\star$ est vérifiée et la proposition 4 démontrée. ■

Le lemme de Goursat se généralise à une fonction holomorphe au voisinage d'un rectangle, sauf en un nombre fini de points. Nous utiliserons une conséquence de cette généralisation (proposition 6) pour obtenir la représentation intégrale d'une fonction holomorphe (théorème 1).

Proposition 5. *Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un rectangle R, sauf en un nombre fini de points $\zeta_1, ..., \zeta_p$. Si pour tout $k \in \{1, ..., p\}, \lim_{z\to\zeta_k}(z - \zeta_k)f(z) = 0$, alors : $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

<u>Démonstration</u> : elle est pratiquement identique à celle du lemme de Goursat. Divisons le rectangle en un nombre fini de rectangles, chaque rectangle contenant un point ζ_j étant un carré centré en ζ_j (vérifier sur un dessin qu'une telle partition du rectangle est possible). L'intégrale de f est nulle sur le contour de chaque rectangle ne contenant pas un point ζ_j

d'après le lemme de Goursat. Soit R^j le carré contenant le point ζ_j. On peut construire comme précédemment une partition de R^j par des rectangles, celui contenant ζ_j étant un carré centré en ζ_j. On construit ainsi pour tout $k \in \{1, ..., p\}$ une suite $(R^j_k)_j$ de carrés centrés en ζ_k, convergeant vers le point ζ_k. Pour tout j, on a :$\int_\gamma f(w)dw = \sum_{k=1}^p \int_{bR^j_k} f(w)dw$.

Soit ε un réel strictement positif et j un entier tel que pour tout $k \in \{1, ..., p\}$ et pour tout point w sur bR^j_k on ait : $|f(w)| < \dfrac{\varepsilon}{|w - \zeta_j|}$. Si $r_{k,j}$ est le rayon de R^j_k, $|w - \zeta_j| \geq r_{k,j}$ sur bR^j_k. La longueur de bR^j_k étant égale à $8r_{k,j}$, on obtient :

$$\int_{bR^j_k} \frac{dw}{|w - \zeta_j|} \leq 8$$

et donc

$$\int_{bR^j_k} |f(w)|dw < 8\varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$|\int_{bR} f(w)dw| \leq 8p\varepsilon$$

et donc $\displaystyle\int_{bR} f = 0.$ ∎

La proposition 5 a pour conséquence :

Proposition 6. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque D de $\mathbb{C}$, sauf en un nombre fini de points $\zeta_1, ..., \zeta_p$. On suppose que pour tout $k \in \{1, ..., p\}, \lim_{z\to\zeta_k}(z - \zeta_k)f(z) = 0$. Alors pour tout chemin γ inclus dans D : $\int_\gamma f(w)dw = 0$.*

<u>Démonstration</u> : Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ le centre du disque D. Supposons que les droites $\{x = x_0\}$ et $\{y = y_0\}$ ne contiennent aucun des points $\zeta_1, ..., \zeta_p$. Pour tout point $z = x + iy$ de $D\backslash\{\zeta_1, ..., \zeta_p\}$, il existe x_1 et y_1 tels que les chemins

$$\gamma_1 : (x_0, y_0) \to (x_1, y_0) \to (x_1, y) \to (x, y)$$

et

$$\gamma_2 : (x_0, y_0) \to (x_0, y_1) \to (x, y_1) \to (x, y)$$

soient inclus dans $D\backslash\{\zeta_1, ..., \zeta_p\}$. Ainsi on a : $\int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw$ et la fonction F définie sur $D\backslash\{\zeta_1, ..., \zeta_p\}$ par :

$$F(z) = \int_{\gamma_1} f(w)dw$$

est une primitive de f, de façon analogue à la démonstration de la proposition 4. On conclut alors par la proposition 3.

Supposons maintenant que l'ensemble $\{\zeta_1, ..., \zeta_p\}$ rencontre l'une des droites $\{x = x_0\}$, $\{y = y_0\}$. L'ensemble $\gamma^\star$ étant compact dans D, il existe un point $z_1 = x_1 + iy_1$ et un disque D' centré en z_1 tel que D' soit inclus dans D, $\gamma^\star$ soit inclus dans D' et l'ensemble $\{\zeta_1, ..., \zeta_p\}$ ne rencontre pas lezs droites $\{x = x_1\}$, $\{y = y_1\}$. On raisonne alors sur le disque D'. ∎

Comme application de la proposition 6 on a la formule de Cauchy, donnant une représentation intégrale d'une fonction holomorphe :

Théorème 1. *Soit f une fonction holomorphe sur un disque D de $\mathbb{C}$ et γ un chemin fermé dans D. Pour tout point z de $D \backslash \gamma^\star$, on a :*

$$Ind_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dz.$$

<u>Démonstration</u> : Soit z un point de $D \backslash \gamma^\star$. La fonction F définie sur $D \backslash \{z\}$ par

$$F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

est holomorphe sur $D \backslash \{z\}$ et $\lim_{w \to z} (w-z) F(w) = 0$. Le résultat se déduit alors de la proposition 6. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de montrer l'équivalence entre fonction holomorphe et fonction analytique. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et r un réel positif tel que le disque $D(a,r)$ soit inclus dans U. Si γ est le chemin défini par $\gamma(t) = a + re^{2i\pi t}$, nous avons vu dans la proposition 2 que pour tout point de $D(a,r)$ on a : $Ind_\gamma(z) = 1$.

Si f est une fonction holomorphe sur U on a, d'après le théorème 1 :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{w-z}$ est développable en série sur le disque $D(a,r)$ avec :

$$\frac{1}{w-z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD(a,r)} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} \right) (z-a)^k dw.$$

Puisque à z fixé dans $D(a,r)$ la série $\sum \frac{(z-a)^k}{(w-a)^{k+1}}$ est normalement convergente pour w dans $bD(a,r)$, on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int$. La fonction f est donc développable en série sur $D(a,r)$, c'est-à-dire analytique sur $D(a,r)$, de développement

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw \right) (z-a)^k.$$

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U.*

i) f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique en tout point de U.

ii) Pour tout point a de U : $f(z) = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$ sur $D(a, dist(a, \mathbb{C} \backslash U))$ avec la convention $dist(a, \emptyset) = +\infty$ et $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$. Ainsi, si $U = \mathbb{C}$, f est une fonction entière.

iii) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et pour tout z dans U on a :

$$\forall n \geq 0, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

où $D(a,r)$ est un disque quelconque contenant z et inclus dans U.

Corollaire 1. *Si f est holomorphe sur U, toutes les dérivées de f sont holomorphes sur U.*

Démonstration : On montre comme dans la démonstration du théorème 2 que la fonction $z \mapsto \dfrac{n!}{2i\pi} \displaystyle\int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ est développable en série. ■

Corollaire 2. *Inégalités de Cauchy*

Si f est holomorphe sur un ouvert U et si $D(a,r)$ est inclus dans U alors :

$$\forall n \geq 0, \quad \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{bD(a,r)} |f|.$$

Démonstration : D'après la partie (iii) du théorème 2 on a :

$$\forall n \geq 0, \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Cependant $|w-a| = r$ sur $bD(a,r)$, $|f(w)| \leq \sup_{bD(a,r)} |f|$ sur $bD(a,r)$ et $\left| \int_{bD(a,r)} \right| \leq 2\pi r$. ■

Corollaire 3. *Soit $D(a,r)$ un disque de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\overline{D(a,r)}$. Si pour tout z de $D(a,r)$, on a $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$, la fonction f est holomorphe sur $D(a,r)$.*

La condition "f continue sur $\overline{D(a,r)}$" assure que la quantité $\int_{bD(a,r)} \dfrac{f(w)}{w-z} dw$ est bien définie pour z dans $D(a,r)$.

Démonstration : l'analyticité de la fonction f a été prouvée dans la démonstration du théorème 2. On peut alors utiliser la partie (i) du théorème 2.

II. Applications

Nous allons dans cette partie tirer des conséquences directes du théorème 1 (formule de Cauchy) et du théorème 2 (analyticité d'une fonction holomorphe).

1. Principe du maximum

C'est l'un des résultats les plus frappants de la théorie des fonctions holomorphes.

Théorème 3. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Si $|f|$ admet un maximum sur U, alors f est constante sur U.*

Démonstration du théorème 3 : supposons qu'il existe un point z_0 de U tel que $|f(z_0)| = \sup_U |f|$. Soit $D(z_0, r)$ un disque inclus dans U. La formule de Cauchy s'écrit :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{bD(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z_0} dw$$

ou encore, en paramétrisant $bD(z_0, r)$ par $w = z_0 + re^{it}$ et en utilisant $dw = ire^{it}dt$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$

Cette formule est connue sous le nom de **formule de la moyenne** : connaissant les valeurs d'une fonction holomorphe sur le bord d'un disque, on connaît la valeur de la fonction au centre du disque en “moyennisant”. Il vient alors, puisque $|f(z_0)| = \sup_U |f|$:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|.$$

S'il existait un réel $t_0 \in [0, 1]$ tel que $|f(a + re^{it_0})| < |f(z_0)|$, la même inégalité serait vraie pour tout t suffisamment proche de t_0 ce qui entraînerait $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt < |f(z_0)|$ et contredirait les inégalités précédentes. La fonction $|f|$ est donc constante sur $bD(z_0, r)$, de valeur $|f(z_0)|$. Ceci étant vrai sur le disque $D(z_0, r')$ pour tout $r' < r$, il s'en suit que la fonction $|f|$ est constante au voisinage de z_0. L'ensemble $E = \{z \in U / |f(z)| = |f(z_0)|\}$ est donc un ouvert de U. C'est un fermé de U comme image réciproque du fermé $\{|f(z_0)|\}$ par la fonction continue $|f|$, et il est non vide puisque z_0 appartient à E. La connexité de U entraîne alors l'égalité $E = U$: le module de f est constant sur U. D'après l'exercice 5 du chapitre 1, la fonction f est constante sur U.

Corollaire 4. *Toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe borné U et continue sur $\overline{U}$ atteint son maximum sur le bord de U.*

Démonstration : La fonction f, continue sur le compact $\overline{U}$, admet une borne supérieure M sur $\overline{U}$. Si M est atteinte en un point de U, la fonction f est constante sur U d'après le théorème 3 et donc sur $\overline{U}$ par continuité : M est atteinte sur bU. ∎

2. Théorème de Liouville

Théorème 4. *Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.*

Démonstration : Soit f vérifiant les hypothèses du corollaire et $A = \sup_{\mathbb{C}} |f|$. D'après le théorème 2 parties (ii-iii), la fonction f est développable en série entière : $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, avec pour tout $r > 0$: $|f^{(n)}(0)| \leq A \dfrac{n!}{r^{n+1}}$. En faisant tendre r vers $+\infty$, il vient : $\forall n \geq 1, f^{(n)}(0) = 0$. La fonction f est donc constante sur $\mathbb{C}$: $f \equiv f(0)$. ∎

Corollaire 5. *Tout polynôme de degré $d \geq 1$ admet exactement d racines (comptées avec leur multiplicité) dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration : Soit P un polynôme non constant (ie de degré ≥ 1). Supposons que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction $g : z \mapsto \dfrac{1}{P(z)}$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$. Puisque $\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, la fonction g est bornée sur $\mathbb{C}$ et donc constante d'après le théorème 4. Le polynôme P est donc constant, ce qui contredit $deg(P) \geq 1$.

Ainsi, il existe z_0 dans $\mathbb{C}$ tel que $P(z_0) = 0$ et donc $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

La démonstration du corollaire se finit maintenant par récurrence. Soit d un entier supérieur ou égal à 1. Supposons que tout polynôme de degré $k \leq d$ admet exactement k racines dans $\mathbb{C}$. Si P est un polynôme de degré $d+1$, le polynôme Q obtenu précédemment admet exactement d racines par hypothèse et P admet donc $d+1$ racines. ■

Le corollaire 5 est connu sous le nom de théorème de d'Alembert et est souvent formulé de la façon suivante (équivalente à la formulation du corollaire 5) :

Théorème de d'Alembert : Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

3. Principe des zéros isolés

On rappelle qu'un point a est **isolé** dans un ensemble A si a admet un voisinage U_a tel que $A \cap U_a = \{a\}$. Le résultat suivant est un corollaire de l'analyticié d'une fonction holomorphe (théorème 2) :

Théorème 5. *Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. L'ensemble $Z(f) = \{z \in U / f(z) = 0\}$ des zéros de f est un ensemble de points isolés. En particulier, pour tout compact K inclus dans U, la fonction f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur K.*

Démonstration : Soit a un point de U. D'après le théorème 2 (ii), il existe un réel $r > 0$ tel que $D(a, r)$ soit inclus dans U et $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$ sur $D(a, r)$. Supposons que la fonction f est identiquement nulle sur le disque $D(a, r)$. Soit z un point quelconque de U. D'après le dernier rappel du chapitre 1, on peut joindre a et z par un chemin inclus dans l'ouvert U. On peut donc construire une suite finie de disques $(D(a_j, r_j))_{0 \leq j \leq p}$ inclus dans U tels que $a_0 = a$, pour tout $j \in \{1, ..., p - 1\}$, le point a_j appartienne à $D(a_j, r_j)$ et tels que z appartienne à $D(a_p, r_p)$. La fonction f est identiquement nulle sur $D(a_0, r_0)$ et donc au voisinage de a_1; toutes les dérivées de f sont ainsi nulles en a_1. Puisque f est développable en série entière centrée en a_1 sur $D(a_1, r_1)$ d'après le théorème 2 (ii), il s'en suit que f est identiquement nulle sur $D(a_1, r_1)$. En continuant ce raisonnement, on obtient que f est nulle en z. Le point z étant choisi quelconque dans U, la fonction f serait identiquement nulle sur U ce qui contredit l'hypothèse. La fonction f n'est donc pas identiquement nulle sur $D(a, r)$: il existe un entier n tel que $a_n \neq 0$.

Supposons que a soit un zéro de la fonction f, c'est-à-dire que $f(a) = 0$.

Soit $n_0 = \sup\{n / a_n \neq 0\}$. On peut alors écrire $f(z) = (z - a)^{n_0} \sum_{n \geq n_0} a_n (z - a)^{n - n_0} = (z - a)^{n_0} g(z)$ sur $D(a, r)$. La fonction g ne s'annule pas en a et par continuité il existe un voisinage U_a de a tel que g ne s'annule pas sur U_a. Le point a est donc l'unique zéro de f sur U_a, ce qui montre la première partie du théorème.

Soit K un compact inclus dans U. Si f admettait une infinité de zéros sur K, le théorème de Bolzano-Weierstrass entraînerait que l'ensemble $Z(f)$ aurait un point d'accumulation dans U ce qui est impossible. ■

Comme conséquence immédiate du théorème 5 nous avons :

Corollaire 6. *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$, telles que $f = g$ sur un ensemble admettant un point d'accumulation dans U. Alors $f = g$ sur U.*

Démonstration : L'ensemble $Z(f - g)$ admet un point d'accumulation dans U et donc $f = g$ d'après le théorème 5. ■

4. Singularités éliminables

Définition 2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de U. On dit que a est une* **singularité** *d'une fonction f si f est holomorphe sur $U\backslash\{a\}$. Si f se prolonge en une fonction holomorphe sur U, a est dite* **singularité éliminable** *pour f.*

Théorème 6. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et f une fonction holomorphe sur $U\backslash\{a\}$. On suppose qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $D(a, r)$ soit inclus dans U et f soit bornée sur $D(a, r)$. Alors a est une singularité éliminable de f.*

Démonstration : voir exercice 9.

Remarques :

1. La proposition 5 n'est pas un corollaire immédiat du théorème 6 et du lemme 1, la propriété "$\lim_{z\to\zeta}(z - \zeta)f(z) = 0$" étant plus faible que la propriété "f bornée au voisinage de ζ."

2. L'hypothèse de connexité est importante dans le principe du maximum, une fonction constante sur deux ouverts disjoints n'étant pas nécessairement constante. Il en est de même dans le principe des zéros isolés (voir la démonstration), même si le résultat peut être ensuite étendu à un ouvert quelconque (faire le travail sur chaque composante).

En revanche, elle n'est pas nécessaire dans les théorèmes 2 et 6, puisqu'on travaille sur un disque inclus dans le domaine : le disque est lui connexe.

Exercices du chapitre 2

Exercice 1 :

1. Soit γ un chemin de $\mathbb{C}$ et $\overline{\gamma}$ son image par l'application $z \mapsto \overline{z}$. Montrer que si f est une fonction continue sur $\gamma^\star$, la fonction $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est continue sur $\overline{\gamma}$ et : $\overline{\int_\gamma f(w)dw} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{w})}dw$.

2. Montrer que : $\overline{\int_{bD(0,1)} f(w)dw} = -\int_{bD(0,1)} \overline{f(w)}\dfrac{dw}{w^2}$.

Exercice 2 :

1. Soit γ un chemin inclus dans le disque fermé $\overline{D(a,R)}$ et, pour tout n, γ_n le chemin $\gamma_n(t) = (1 - \frac{1}{n})\gamma(t)$. Montrer que si f est une fonction continue sur le disque $\overline{D(a,R)}$ on a :

$$\int_\gamma f(w)dw = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} f(w)dw.$$

2. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur $D(a,r)$ et continue sur $\overline{D(a,r)}$, on a, pour tout z dans $D(a,r)$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{bD(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Exercice 3 :

1. Déterminer un chemin fermé γ tel que $\gamma^\star$ soit l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{dw}{w}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$.

Exercice 4 :

1. Calculer : $\displaystyle\int_{bD(0,2)} \frac{w^2}{w+1}dw$, $\displaystyle\int_{bD(0,2)} \frac{\sin w e^w}{w}dw$.

2. Si $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2x = 0\}$ calculer $\displaystyle\int_{bC} \frac{e^w}{w^2-1}dw$.

3. Calculer $\displaystyle\int_{bD(0,2)} \frac{w+1}{w(w-1)}dw$.

Exercice 5 : Ecrire le développement en série entière à l'origine des fonctions suivantes :

$$\frac{z}{z-1}, \quad \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Préciser leur rayon de convergence.

Exercice 6 : Montrer que pour tout z dans $\mathbb{C}$: $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

Exercice 7 : Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert borné U de $\mathbb{C}$, continue sur l'adhérence de U. Montrer que si f ne s'annule pas sur U alors le minimum de $|f|$ est atteint sur bU.

Exercice 8 : Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et A et B deux entiers positifs tels que $|f(z)| \leq A(1+|z|)^B$ sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur ou égal à B.

Exercice 9 : Démonstration du théorème 6 :

1. Montrer que la fonction g définie sur U par $g(a) = 0$ et $g(z) = (z-a)^2 f(z)$ pour $z \neq a$ est holomorphe sur U.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $D(a,r)$.

Exercice 10 : Lemme de Schwarz

Soit f une fonction holomorphe de $D(0,1)$ dans $D(0,1)$. On suppose que $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout z dans $D(0,1)$: $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
2. Montrer que s'il existe $z_0 \neq 0$ dans $D(0,1)$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) = cz$ sur $D(0,1)$ avec $|c| = 1$.