ANNÉE UNIVERSITAIRE 2007 /2008
SECONDE SESSION D'AUTOMNE

ETAPE : L2 **UE MHT302**
Épreuve Analyse 2
Date : .. ... 20..
Heure : .. Heure ... *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Monsieur : Charpentier Philippe
Tous Documents Interdits

Exercice I

Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
Pour chaque question on justifiera la réponse : soit par une démonstration soit par un contre-exemple.

1. Toute partie non ouverte de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
2. Une union quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est ouverte.
3. Une union quelconque de fermés de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
4. Une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$, pour la distance euclidienne, est compacte.
5. Une boule fermée de $\mathbb{R}^n$, pour la distance euclidienne, est compacte.
6. L'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x^2+3y^4\leq 1\}$ est un compact.
7. L'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x+3y^2\leq 1\}$ est un compact.
8. L'image par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ d'un fermé est fermée.
9. L'image par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ d'un compact est fermée.
10. L'image réciproque par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ d'un compact est compacte.

Exercice II

Soit A un compact de $\mathbb{R}$ et B un fermé de $\mathbb{R}^2$ contenu dans $\mathbb{R}\times A$. On désigne par p la première projection $(x,y)\mapsto x$. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $p(B)$ qui converge vers un point $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $y_n\in A$ tel que $(x_n,y_n)\in B$.
2. Indiquer pourquoi il existe une sous-suite $\left(y_{n_p}\right)_p$ de la suite $(y_n)_n$ qui converge vers un point $y\in\mathbb{R}$.
3. Que peut-on dire de la suite $\left(\left(x_{n_p},y_{n_p}\right)\right)_p$?
4. Conclure que $p(B)$ est fermé.

Exercice III

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

T.S.V.P.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent.
4. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2_*$. Montrer que $t \mapsto f(at,bt)$ est différentiable sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

1. Montrer que les ensembles

$$\Omega_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x > 0,\ y > 0, \text{ et } z > 0\right\} \text{ et } \Omega_2 = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v+w > u,\ u+w > v, \text{ et } u+v > w\right\}$$

sont des ouverts de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $\varphi : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $\varphi(x,y,z) = \left(y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2\right)$. Montrer que φ est une bijection de Ω_1 sur Ω_2. *Indication* : on pourra résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} Y+Z & = & u \\ X+Z & = & v \\ X+Y & = & w \end{array}\right.$, $(u,v,w) \in \Omega_2$.

3. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur Ω_2 par $g(u,v,w) = f\left(\varphi^{-1}(u,v,w)\right)$, de sorte que, pour $(x,y,z) \in \Omega_1$, $f(x,y,z) = g\left(\varphi(x,y,z)\right)$.
   (a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ de f en un point $(x,y,z) \in \Omega_1$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ et $\frac{\partial g}{\partial w}$ de g.
   (b) On suppose, dans toute la suite que, pour tout $(x,y,z) \in \Omega_1$, $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$. Que peut-on dire de $\frac{\partial g}{\partial w}$?
   (c) Soient $u > 0$ et $v > 0$ fixés. Montrer que l'ensemble $\{w > 0 \text{ tels que } (u,v,w) \in \Omega_2\}$ est l'intervalle $]\,|v-w|, v+w[$.
   (d) En déduire qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y,z) = h(y^2+z^2, x^2+z^2)$.

FIN