DIRECTION DE LA SCOLARITÉ ET DE LA VIE ÉTUDIANTE — LICENCE
UNIVERSITÉ BORDEAUX I Sciences Technologies

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2008 /2009
PREMIÈRE SESSION D'AUTOMNE

ETAPE : L2 **UE MHT302**
Épreuve Analyse 2
Date : 23 Décembre 2008
Heure : 8 Heure 30 *Durée :* 3 Heures
Épreuve de Monsieur : Charpentier Philippe
Tous Documents Interdits

Département Licence

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
3. Calculer explicitement $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ (distinguer les cas $(x,y)\neq(0,0)$ et $(x,y)=(0,0)$).
4. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que $(x,y)\mapsto df_{(x,y)}$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}\right)$.
5. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$) a une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ (resp. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$) au point $(0,0)$ puis en tout point de $\mathbb{R}^2$.
6. Que peut-on dire de la continuité des fonctions $(x,y)\mapsto\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $(x,y)\mapsto\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$? (justifier la réponse)

Exercice II

Soit f la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x^2+y^2+(ax+by+c)^2$, où a, b, c sont des paramètres réels.

1. Étudier, suivant les valeurs des paramètres, l'existence d'extrema locaux pour f.
2. La fonction f possède-t-elle des extrema globaux (*étudier le comportement de f lorsque $\|(x,y)\|$ tends vers $+\infty$*) ? Si oui trouver leurs natures et leurs valeurs.

Exercice III

Le but de cet exercice est de chercher les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ solutions de l'équation (E) suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x},\quad (x,y)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}\tag{E}$$

1. Vérifier que la fonction

$$f_0(x,y)=\frac{y}{x}(1+\ln x),\quad (x,y)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R},$$

satisfait à l'équation (E).

2. Soit maintenant f une solution quelconque de (E) sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit g la fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ définie par $g(u,v)=f(u,uv)$.
   (a) Calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de f.
   (b) Montrer (en utilisant que f vérifie (E)) que
$$u\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=v,\quad (u,v)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}.$$
   (c) En déduire qu'il existe une fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g(u,v)=v\ln u+h(v)$, $(u,v)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
   (d) En déduire la forme générale des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).

Exercice IV

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré n à coefficients réels. Pour $a=(a_0,a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, on note P_a le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P_a(X)=\sum_{i=0}^n a_iX^i$.

1. Montrer que l'application $a\mapsto P_a$ est linéaire.
2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour $t\in[0,1]$, $|P_a(t)|\leq\sqrt{n+1}\,\|a\|$, où $\|a\|$ désigne la norme euclidienne de a.
3. Soit $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(a)=\int_0^1\sin\left(P_a(t)\right)dt.$$
4. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction sin, montrer que, pour tous $a\in\mathbb{R}^{n+1}$ et $h\in\mathbb{R}^{n+1}$, on a
$$f(a+h)=f(a)+\int_0^1 P_h(t)\cos\left(P_a(t)\right)dt-\int_0^1\frac{\left(P_h(t)\right)^2}{2}\sin\left(P_a(t)+\vartheta(t)P_h(t)\right)dt,$$
   où $t\mapsto\vartheta(t)$ est une fonction de $]0,1[$ dans $]0,1[$.
5. En déduire que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^{n+1}$ et donner l'expression de la différentielle df_a de f en un point a.

FIN