Devoir Maison 1, à rendre semaine 41

Exercice 1. On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|.\|$. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\},\\
B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\},\\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos x \neq \sin y\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| < 2\},\\
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| < 2\}
\end{aligned}$$

(1) Représenter graphiquement les ensembles A, B, C dans le plan.

La seule difficulté est le graphe de $\cos x = \sin y$. Or $\sin y = \cos x$ si et seulement si, modulo 2π (en la variable y), $y = \arcsin(\cos x)$ ou $y = \pi - \arcsin(\cos x)$. La fonction $x \mapsto \arcsin(\cos x)$ est 2π-périodique, vaut $-x + \frac{\pi}{2}$ sur $[0, \pi]$ et $x - \frac{3\pi}{2}$ sur $[\pi, 2\pi]$ (ce qu'on peut vérifier en dérivant). Au final, $y = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ ou $y = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Déterminer si les ensembles A, B, C, D sont ouverts, fermés ; déterminer leur intérieur, adhérence et frontière.

Posons

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \cos x \neq \sin y\}$$

et

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| < 2\}.$$

Remarquons que les ensembles A, B, E et F sont respectivement les image réciproques de l'intervalle ouvert $]0,1[$ par l'application continue

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto |x-1| \end{cases},$$

de l'intervalle fermé $]-\infty, 1]$ par l'application continue

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto |x| + |y| \end{cases},$$

de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue

$$\phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \cos x - \sin y \end{cases},$$

et de l'intervalle ouvert $]-\infty, 2[$ par l'application continue

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \|(x,y) - (2,0)\| \end{cases}.$$

Ces ensembles sont donc respectivement ouvert, fermé, ouvert et ouvert. L'ensemble $C = E \cap F$ est donc ouvert. On aurait aussi pu voir que $A = (]0,1[\cup]1,2[) \times \mathbb{R}$ est ouvert car produit cartésien de deux ouverts.
Comme les seuls sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^2$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$, A et C ne sont pas fermé, et B n'est pas ouvert.

Comme A est ouvert,
$$\mathring{A} = A.$$
Evidemment, $[0,2] \times \mathbb{R}$ contient A. Réciproquement, pour tout $(x,y) \in [0,2] \times \mathbb{R}$, on trouve une suite x_n de $]0,1[\cup]1,2[$ qui tend vers x. Donc la suite (x_n, y) de A tend vers (x,y). L'ensemble fermé $[0,2] \times \mathbb{R}$ (car produit cartésien de 2 fermés) est donc inclus dans l'adhérence $\bar{A}$. D'où
$$\overline{A} = [0,2] \times \mathbb{R}$$
et donc
$$\mathsf{Fr}(A) = [0,2] \times \mathbb{R} \setminus A = \{0,1,2\} \times \mathbb{R}.$$

Comme B est fermé, $\overline{B} = B$.

Le sous-ensemble
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\} = g^{-1}(]-\infty, 1[)$$
de B est ouvert, pour les mêmes raisons qu'au-dessus, donc inclus dans $\mathring{B}$.

Montrons que les autres points de B ne sont pas dans $\mathring{B}$. Soit donc (x,y) tel que $g(x,y) = 1$. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $g[(1+\epsilon/2).(x,y)] > 1$. Donc $(1+\epsilon/2).(x,y)$ n'est pas dans B, mais on vérifie facilement qu'il est dans la boule centrée en (x,y) de rayon ϵ. Le point (x,y) n'est donc pas dans l'intérieur de B.
En conclusion $\mathring{B} = g^{-1}(]-\infty,1[)$.

Donc $\mathsf{Fr}(B) = \overline{B} \setminus g^{-1}(]-\infty,1[) = g^{-1}(\{1\})$.

L'ensemble C est ouvert donc
$$\mathring{C} = C.$$
Montrons que $\bar{C}$ est la boule fermée $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| \leq 2\}$. L'inclusion directe $\subset$ est triviale, car cette boule est un fermé contenant C.
Montrons l'inclusion réciproque : soit (x,y) dans cette boule. D'après le cours, cette boule est la fermeture de la boule ouverte de mêmes centre et rayon. Donc on trouve une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| < 2\}$ qui converge vers (x,y). Comme la fonction $\cos$ n'est constante en restriction à aucun intervalle ouvert, pour un $0 < \eta_n < \min(1 - \|u_n - (2,0)\|, 1/n)$ suffisamment petit, $\cos(x_n + \eta_n) \neq \sin(y_n)$ et $(x_n + \eta_n, y_n)$ est donc dans E.
En utilisant $\eta_n < 1 - \|u_n - (2,0)\|$ et l'inégalité triangulaire, on obtient que $(x_n + \eta_n, y_n)$ est dans la boule ouverte F. La suite $(x_n + \eta_n, y_n)$ est alors à valeurs dans C et converge encore vers (x,y), car $\eta_n < 1/n$. Donc $(x,y) \in \overline{C}$.
On a donc
$$\bar{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| \leq 2\}.$$

La frontière de C est alors

$$\begin{aligned}\mathsf{Fr}(C) &= \overline{C} \setminus \mathring{C} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| = 2\} \\ &\quad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| < 2 \text{ et } \cos x = \sin y\}.\end{aligned}$$

L'ensemble D est inclus dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, or l'ensemble des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, il existe une suite x_n dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui tend vers x. La suite (x_n, y) de $\mathbb{R}^n \setminus D$ tend alors vers (x,y), donc $(x,y) \notin \mathring{D}$. L'ensemble D est donc d'intérieur vide.

Montrons que $\bar{D}$ est la boule fermée $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| \leq 2\}$. L'inclusion directe $\subset$ est triviale, car cette boule est un fermé contenant D.
Inclusion réciproque : soit (x,y) dans cette boule. Comme pour l'ensemble C, on trouve une suite $u_n = (x_n, y_n)$ dans $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| < 2\}$ qui tend vers (x,y). Par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(\eta_n, \zeta_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$(x_n + \eta_n, y_n + \zeta_n) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

et $\|(\eta_n, \zeta_n)\| < \min(1 - \|u_n\|, 1/n)$. Par le même raisonnement que pour l'ensemble C, on obtient que $(x_n + \eta_n, y_n + \zeta_n)$ est une suite à valeurs dans D qui converge vers (x,y).
On a donc $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| \leq 2\}$.

Enfin $\mathsf{Fr}(D) = \overline{D} \setminus \mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y) - (2,0)\| \leq 2\}$. Cet ensemble n'est évidemment ni ouvert ni fermé car

$$\mathring{D} \neq D \neq \overline{D}.$$

(3) Parmi ces ensembles, lesquels sont compacts ?

Les ensembles A, C et D ne sont pas fermés donc pas compacts. L'ensemble B est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, donc compact, par the théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit le diamètre de A par :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in A\}.$$

1. a) Montrer que si A est bornée, alors $\mathring{A}$, $\bar{A}$ et la frontière $\mathsf{Fr}(A)$ le sont aussi.

Soit A borné et $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\| < r$. Pour tout $x \in \bar{A}$, la boule de rayon 1 centrée en x intersecte A. Par l'inégalité triangulaire on déduit $\|x\| < r + 1$. Donc $\bar{A}$ est borné.
Les ensembles $\mathring{A}$ et $\mathsf{Fr}(A)$ sont évidemment bornés car inclus dans l'ensemble borné $\bar{A}$.

b) On suppose que $\mathring{A}$ non vide. Comparer les diamètres de A, $\mathring{A}$ et $\bar{A}$.

Comme $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$, on a

$$\{\|x - y\|, x, y \in \mathring{A}\} \subset \{\|x - y\|, x, y \in A\} \subset \{\|x - y\|, x, y \in \bar{A}\}$$

donc, en passant au sup, $\operatorname{diam}(\mathring{A}) \leq \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\bar{A})$.

Pour tout $x, y \in \bar{A}$, il existe deux suites x_n et y_n de A qui tendent vers x et y, respectivement. Par continuité de la norme, de l'inversion ($v \mapsto -v$) et de l'addition dans un espace vectoriel normé, la suite $\|x_n - y_n\|$ converge vers $\|x - y\|$, donc

$$\operatorname{diam}(A) \geq \sup\{\|x_n - y_n\|, n \in \mathbb{N}\} \geq \|x - y\|.$$

Par un autre passage au sup, $\operatorname{diam}(A) \geq \operatorname{diam}(\bar{A})$. En conclusion

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A}).$$

En revanche, on n'a pas toujours $\operatorname{diam}(\mathring{A}) = \operatorname{diam}(A)$.
L'ensemble $A = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ est un contre-exemple.

2. Nous montrons maintenant que $\operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A)) = \operatorname{diam}(A)$.

a) Montrer que $\operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$.

L'inclusion $\mathsf{Fr}(A) \subset \bar{A}$ implique, comme précédemment que

$$\operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A)) \leq \operatorname{diam}(\bar{A})$$

On conclut avec l'égalité $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$ montrée en 1.

b) Soit $x \in A$ et $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On considère l'ensemble

$$X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}.$$

Montrer que X admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Remarque : *il faut évidemment supposer que A est borné pour les questions suivantes. $A = \mathbb{R}^n$ est un contre-exemple trivial. Dans la suite, on se donne donc $r \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\| < r$.*

Pour tout $t \in X$, $\|x + tu\| < r$, donc par la seconde inégalité triangulaire $|\|x\| - |t|.\|u\|| < r$, en particulier $|t|.\|u\| - \|x\| < r$. Comme u non nul, $|t| < \frac{r+\|x\|}{\|u\|}$. Donc X est borné et admet une borne sup dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathsf{Fr}(A)$.

Soit $\Delta = \{x + tu, t \geq 0\}$ une demi droite de $\mathbb{R}^n$ et soit $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$.
Soit s la borne sup de X. Il existe s_n une suite de X et t_n une suite de $\mathbb{R} \setminus X$ qui tendent vers s.
Ceci donne une suite $x + s_n u$ de A et une suite $x + t_n u$ de $\mathbb{R}^n \setminus A$ qui convergent vers $x + su$.
Le point $x + su$ de Δ est donc dans l'adhérence de A et l'adhérence de $\mathbb{R}^n \setminus A$, donc dans la frontière de A.

d) Conclure que $\operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A)) = \operatorname{diam}(A)$.

Si A est un singleton, $\mathsf{Fr}(A) = A$ donc l'égalité est vérifiée.
Sinon, soient $x, y \in A$, $x \neq y$, et posons $u = y - x$. Alors, d'après la question précédente, les demi-droites $\Gamma = \{x - tu, t \geq 0\}$ et $\Delta = \{y + tu, t \geq 0\}$ intersectent $\mathsf{Fr}(A)$ en deux points a et b, respectivement. Comme x et y sont dans le segment $[a, b]$, $\|x - y\| \leq \|a - b\| \leq \operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A))$.
Par passage au sup, on a $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A))$. Avec l'inégalité montrée en a),

$$\operatorname{diam}(\mathsf{Fr}(A)) = \operatorname{diam}(A).$$

Exercice 3 (Ensemble de Cantor). On définit dans $\mathbb{R}$ une suite de parties $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \dots$ de la manière suivante. On pose $C_0 = [0, 1]$. On définit par récurrence C_{n+1} à partir de C_n en coupant chaque intervalle de C_n en trois et en enlevant le tiers ouvert du milieu. Ainsi $C_1 = C_0 \backslash]1/3, 2/3[= [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 1]$, etc. On appelle ensemble de Cantor $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

1. Dessiner C_0, C_1, C_2, C_3.
2. Montrer que C est un compact non vide.

   Une récurrence immédiate montre que chaque ensemble C_n est non vide, réunion finie d'intervalles fermés bornés, donc fermé borné. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$, chaque C_n est donc compact. Puisque $C = \cap_{n \geq 0} C_n$, il s'ensuit que C est compact non vide par un résultat du cours.
   Remarque : on pouvait raisonner différement, en disant que C est fermé (comme intersection de fermés) et borné (car l'intersection est décroissante, $C_{n+1} \subset C_n$), donc compact. Attention cependant pour $C \neq \emptyset$: on a utilisé la compacité des C_n pour conclure que $\cap C_n \neq \emptyset$. En effet une intersection de fermés non vides peut-être vide, comme par exemple $\cap_{n \geq 0} [n, +\infty[= \emptyset$. Si on n'invoque pas la compacité des C_n, on doit montrer directement que $C \neq \emptyset$, en considérant le point 0 par exemple (par récurrence il appartient à tous les C_n donc à C).

3. Montrer que C est d'intérieur non vide.

   (*on pourra étudier la longueur des C_n, c'est-à-dire la somme des longueurs des intervalles constituant C_n*)

   On appelle longueur de C_n (notée ℓ) la somme des longueurs des intervalles formant C_n. Clairement $\ell(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\ell(C_n)$ puisque qu'on enlève à C_n un tiers de chaque intervalle pour obtenir C_{n+1}. Par récurrence on déduit
   $$\ell(C_{n+1}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$
   lorsque $n \to \infty$. Il s'ensuit que si $I \subset C$ est un intervalle, il est réduit à un singleton. En effet $I \subset C \subset C_n$ implique $\ell(I) \subset \ell(C_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n donc $\ell(I) = 0$. On conclut que C est d'intérieur vide.

4. On rappelle qu'un point x d'une partie $A \subset \mathbb{R}^N$ est *isolé* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \cap A = \{x\}$. Montrer qu'aucun point du Cantor n'est isolé. (*on pourra montrer que les bords des intervalles des C_n sont dans C, et utiliser ces points.*).

   On montre au préalable que si $[a, b]$ est un des intervalles d'un C_n, alors $a \in C$ et $b \in C$. Observons d'abord que les intervalles de C_n sont de longueur $\frac{1}{3^n}$ (récurrence immédiate), donc $[a, b] = [a, a + \frac{1}{3^n}]$. Montrons que $[a, a + \frac{1}{3^m}]$ est intervalle de C_m pour tout $m \geq n$. C'est vrai au rang n par hypothèse. Supposons que $[a, a + \frac{1}{3^m}]$ soit intervalle de C_m. Alors par construction
   $$[a, a + \frac{1}{3^{m+1}}] \cup [a + \frac{2}{3^{m+1}}, a + \frac{1}{3^m}]$$
   sont les deux intervalles obtenus en enlevant le tiers ouvert du milieu, et en particulier $[a, a + \frac{1}{3^{m+1}}] \subset C_{m+1}$, ce qui achève la récurrence. On obtient de même que $[b - \frac{1}{3^m}, b]$ est intervalle de C_m pour tout $m \geq n$. En particulier on a $a, b \in C_m$ pour tout $m \geq n$ donc $a, b \in C$.

Soit maintenant $x \in C$ et $\epsilon > 0$. Pour chaque entier n, $x \in C_n$ donc il existe un intervalle $[a_n, a_n + \frac{1}{3^n}] = [a_n, b_n]$ de C_n contenant x. Prenons n assez grand tel que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$, alors

$$[a_n, a_n + \frac{1}{3^n}] \subset B(x, \epsilon) =]x - \epsilon, x + \epsilon[$$

. Par l'argument préalable, $a_n, b_n \in C$ et donc $a_n, b_n \in B(x, \epsilon) \cap C$. Comme $a_n \neq b_n$, $B(x, \epsilon) \cap C \neq \{x\}$, comme voulu.