Devoir Maison 1, à rendre semaine 41

Exercice 1. On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|.\|$. On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<|x-1|<1\},\\
B &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\leq 1\},\\
C &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \cos x\neq \sin y\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(2,0)\|<2\},\\
D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{Q}, y\notin\mathbb{Q}\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(2,0)\|<2\}
\end{aligned}$$

(1) Représenter graphiquement les ensembles A, B, C dans le plan.

(2) Déterminer si les ensembles A, B, C, D sont ouverts, fermés ; déterminer leur intérieur, adhérence et frontière.

(3) Parmi ces ensembles, lesquels sont compacts ?

Exercice 2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On définit le diamètre de A par :

$$\mathrm{diam}(A)=\sup\{\|x-y\|, x,y\in A\}.$$

1. a) Montrer que si A est bornée, alors $\mathring{A}$, $\bar{A}$ et la frontière $\mathsf{Fr}(A)$ le sont aussi.
   b) On suppose que $\mathring{A}$ non vide. Comparer les diamètres de A, $\mathring{A}$ et $\bar{A}$.
2. Nous montrons maintenant que $\mathrm{diam}(\mathsf{Fr}(A))=\mathrm{diam}(A)$.
   a) Montrer que $\mathrm{diam}(\mathsf{Fr}(A))\leq\mathrm{diam}(A)$.
   b) Soit $x\in A$ et $u\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. On considère l'ensemble
   $$X=\{t\geq 0 \mid x+tu\in A\}.$$
   Montrer que X admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathsf{Fr}(A)$.
   d) Conclure que $\mathrm{diam}(\mathsf{Fr}(A))=\mathrm{diam}(A)$.

Exercice 3 (Ensemble de Cantor)**.** On définit dans $\mathbb{R}$ une suite de parties $C_0\supset C_1\supset C_2\ldots$ de la manière suivante. On pose $C_0=[0,1]$. On définit par récurrence C_{n+1} à partir de C_n en coupant chaque intervalle de C_n en trois et en enlevant le tiers ouvert du milieu. Ainsi $C_1=C_0\setminus]1/3,2/3[=[0,1/3]\cup[2/3,1]$, $C_2=[0,1/9]\cup[2/9,3/9]\cup[6/9,7/9]\cup[8/9,1]$, etc. On appelle ensemble de Cantor $C=\bigcap_{n\geq 0}C_n$.

1. Dessiner C_0, C_1, C_2, C_3.
2. Montrer que C est un compact non vide.
3. Montrer que C est d'intérieur vide. (*on pourra étudier la longueur des C_n, c'est-à-dire la somme des longueurs des intervalles constituant C_n*)
4. On rappelle qu'un point x d'une partie $A\subset\mathbb{R}^N$ est *isolé* s'il existe $\epsilon>0$ tel que $B(x,\epsilon)\cap A=\{x\}$. Montrer qu'aucun point du Cantor n'est isolé. (*on pourra montrer que les bords des intervalles des C_n sont dans C, et utiliser ces points.*).