Université Bordeaux I **2009-2010**
Analyse 2 (MHT 302)

Compléments du cours N. 2 : les règles de différentiation, exemples, la formule de Taylor d'ordre 2

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

• Différentiation d'un produit de deux fonctions

Théorème 1 *Soient $x \in O$, $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert f, g deux fonctions définies là-dessus, $f, g : O \to \mathbb{R}$. Si $f, g \in D(x)$, alors $fg \in D(x)$ et*

$$D(fg)(x) = f\, Dg(x) + g\, Df(x).$$

Démonstration. Par la définition de la différentiabilité, on a pour $h \in \mathbb{R}^d$ (l'accroissement h est tel que $x + h \in B(x, \delta) \subset O$)

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h), \quad \lim_{||h|| \to 0} \frac{|\varepsilon_x(h)|}{||h||} = 0, \\ g(x+h) &= g(x) + Df(x) \cdot h + \varepsilon'_x(h), \quad \lim_{||h|| \to 0} \frac{|\varepsilon'_x(h)|}{||h||} = 0. \end{aligned}$$

En multipliant ces deux relations, on obtient

$$fg(x+h) = fg(x+h) + \{(f\, Dg(x) + g\, Df(x)) \cdot h\} + (\varepsilon'_x(h) \cdot f(x) + \varepsilon_x(h) \cdot g(x)).$$

La partie linéaire de l'expression à droite (c.à.d., la différentielle en question) est contenue dans les accolades. Il faut maintenant démontrer que le reste (le terme en parenthèses à droite) satisfait la propriété de la définition de la différentiabilité. On a

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{|\varepsilon'_x(h) \cdot f(x)|}{||h||} = |f(x)| \lim_{||h|| \to 0} \frac{|\varepsilon'_x(h)|}{||h||} = 0,$$

et la vérification pour le deuxième terme du reste est identique. □

• Différentiation d'une composition de deux applications

Ce théorème s'appelle aussi "la règle de la chaine".

Théorème 2 *Soient $O \subset \mathbb{R}^d$, $O_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $O_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ des ouverts. Soient $f \in D(O, O_1), g \in D(O_1, O_2)$ (et donc $g \circ f$ est bien définie). Alors $g \circ f \in D(O, O_2)$ et pour tout $x \in O$*

$$(Dg \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

Observez que l'expression $Dg(f(x)) \cdot Df(x)$ est un produit des matrices de dimensions $d_2 \times d_1$ et $d_1 \times d$ (et il est bien défini par conséquent).
Démonstration. Pour tout $x \in O$ posons $y = f(x)$ et écrivons, comme avant, les définitions de différentielles

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h), \\ g(y+h') &= g(y) + Dg(y) \cdot h' + \varepsilon'_y(h'), \end{aligned}$$

où h, h' sont suffisamment petits pour que $x + h \in B(x, \delta) \subset O$ et $y + h' \in B(y, \delta') \subset O_1$. Les restes admettent les majorations habituelles. Mettons maintenant $f(x+h)$ à la place de $y+h'$ et développons en utilisant la première ligne ($h' = Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h)$). Alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) &= g(f(x+h)) = g\big(y + Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h)\big) \\ &= g(y) + Dg(y) \cdot (Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h)) + \varepsilon'_y(Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h)) \\ &= g(y) + \big(Dg(y)\, Df(x) \cdot h\big) + \big\{Dg(y) \cdot \varepsilon_x(h) + \varepsilon'_y(Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h))\big\}. \end{aligned}$$

A droite, le terme entre parenthèses est la partie linéaire et, donc, la différentielle. Il nous reste à vérifier que le reste (c.à.d., le terme entre accolades) tend vers 0 dans le sens approprié. Pour la première partie :

$$\begin{aligned} \lim_{||h|| \to 0} \frac{||Dg(y) \cdot \varepsilon_x(h)||_2}{||h||} &\leq \lim_{||h|| \to 0} \frac{||Dg(y)||_o ||\varepsilon_x(h)||_1}{||h||} \\ &= ||Dg(y)||_o \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\varepsilon_x(h)||_1}{||h||} = 0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième : on a $h' = Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h)$ et

$$\lim_{||h|| \to 0} ||Df(x) \cdot h + \varepsilon_x(h)||_1 \leq \lim_{||h|| \to 0} (||Df(x)||_o + \varepsilon)||h|| = 0,$$

où $\varepsilon > 0$ est une constante qu'on peut choisir aussi petite qu'on veut. En particulier, nous avons $||h'||_1/||h|| \leq C$ quand $||h|| \to 0$. Alors

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||\varepsilon'_x(h')||_2}{||h||} = \lim_{||h|| \to 0} \frac{||\varepsilon'_x(h')||_2}{||h'||_1} \cdot \frac{||h'||_1}{||h||} = 0,$$

car le premier facteur va vers 0 par la définition et le deuxième est borné. $\square$

- **Exemple**
  Soient

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad g(u, v) = \begin{bmatrix} \sin uv \\ \cos(u+v) \end{bmatrix}, \\ f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2 - 2xy \\ 3y^2 - xy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Calculer la dérivée de l'application $g \circ f$ au point $(1, 1)$.

Solution. Bien évidemment, on peut écrire l'application composée $g \circ f$ explicitement (faites la substitution $u = x^2 - 2xy$ et $v = 3y^2 - xy$), calculer la dérivée totale et poser $(x, y) = (1, 1)$.

Nous allons faire l'usage de la règle de la chaine. Notamment,

$$\begin{aligned} f'(1,1) &= (-1, 2), \\ Df &= \begin{bmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} \\ f'_{2x} & f'_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 2y & -2x \\ -y & 6y - x \end{bmatrix}, \\ Dg &= \begin{bmatrix} g'_{1u} & g'_{1v} \\ g'_{2u} & g'_{2v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos uv & u \cos uv \\ -\sin(u+v) & -\sin(u+v) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour $(Dg \circ f)(1,1)$ on obtient donc

$$(Dg \circ f)(1,1) = Dg(-1,2) \cdot Df(1,1) = \begin{bmatrix} 2\cos(-2) & -\cos(-2) \\ -\sin 1 & -\sin 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \dots .$$

• **Formule de Taylor d'ordre 2.**

Théorème 3 *Soit $f \in C^2(O,\mathbb{R})$ où $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On a*

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + \frac{1}{2}(D^2 f(x)h, h) + R_2(f,x;h),$$

et $\lim_{||h|| \to 0} \dfrac{||R_2(f,x;h)||}{||h||^2} = 0 \quad (*)$.

Démonstration. L'idée est d'appliquer la formue d'accroissements finis d'abord à la fonction f, et ensuite à sa différentielles Df. Soit $x \in O$ et, comme d'habitude, $h \in \mathbb{R}^d$ suffisamment petit (i.e., $x + h \in B(x,\delta) \subset O$). Alors

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 Df(x+th)dt \cdot h,$$

ou bien

$$f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h = \int_0^1 (Df(x+th) - Df(x))dt \cdot h.$$

Maintenant,

$$Df(x+th) - Df(x) = \int_0^t D^2 f(x+sh)ds \cdot h,$$

et donc

$$f(x+h) - f(x) - Df(x) \cdot h = \int_0^1 \left(\int_0^t \big(D^2 f(x+sh)h, h\big) ds \right) dt.$$

On peut reécrire cette relation comme

$$\begin{aligned} f(x+h) \quad &- \quad f(x) - Df(x) \cdot h - \frac{1}{2}(Df(x)h, h) \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^t \big((D^2 f(x+sh) - D^2 f(x))h, h\big) ds \right) dt =: R_2(f,x;h). \end{aligned}$$

Il est possible de voir que R_2 défini ainsi, satisfait $(*)$. Si on se permet de changer l'ordre de l'intégration, on obtient

$$R_2(f,x;h) = \int_0^1 (1-s)\big((D^2 f(x+sh) - D^2 f(x))h, h\big) ds.$$

□