

ANNEE UNIVERSITAIRE 2018 / 2019
S6 Semestre de Printemps
Epreuve : Analyse fonctionnelle
Date : 06/03/2019 14h-15h30
Lieu : A9 Amphi 1
Documents : non autorisés
Epreuve de M. : Sueur
Collège Sciences et technologies

Exercice 1

Soit X un ensemble non vide. On considère $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

- a) Montrer que d est une distance.
- b) Montrer que tout sous-ensemble de X est ouvert.

Exercice 2

- a) Enoncer le théorème de point fixe de Banach-Picard pour les applications contractantes.
- b) Donner deux exemples d'applications contractantes dans un espace de dimension infinie.
- c) Donner la preuve du théorème de point fixe de Banach-Picard pour les applications contractantes.

Exercice 3

Donner la définition d'une famille de fonctions équicontinues.
Donner deux exemples.

Exercice 4

Dans cet exercice on note H l'espace de Banach $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ des fonctions continues définies sur $[0, 1]$ à valeurs réelles muni de la norme

$$\|f\| := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

On note V l'application qui à chaque f dans H associe la fonction Vf de H définie pour $x \in [0, 1]$ par

$$Vf(x) := \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que V est linéaire et continu de H dans H .
2. On considère une suite de fonctions $(f_n)_n$ bornée dans H . Montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $(Vf_n)_n$.