Correction de l'Exo 7, TD 1

a) Montrer que $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un e.v.n. - évident.

b) Soit $A = \{x \in l^\infty : \forall n \geq 1,\ |x_n| < 1\}$.

A est il ouvert ? fermé ? Déterminer A° et $\bar{A}$.

Démo. A n'est pas ouvert ; en effet, prenons $x = (x_n)_{n\geq 1} = (1 - \frac{1}{n})_{n \geq 1}$. On a :

- $x \in A$, car $|x_n| = |1 - \frac{1}{n}| < 1 \quad \forall n \geq 1$

(*)

- $\forall r > 0$, $B(x,r) \not\subset A$; en effet, soit $y = (y_n)_{n\geq 1} = (1 - \frac{1}{n} + \frac{r}{2})_{n\geq 1}$. alors $y \in B(x,r)$, et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n} + \frac{r}{2}) = 1 + \frac{r}{2}$. Donc, à partir d'un certain rang N, $n \geq N$, on a $|y_n| = y_n \geq 1 + \frac{r}{4}$ et $y \notin A$. Donc $B(x,r) \not\subset A$.

A n'est pas fermé non plus. Rappelons que A est fermé ssi $(\forall (x^n) \subset A$ t.q. $x^n \to x^0\ (n\to\infty)) \Rightarrow (x^0 \in A)$. (c.à.d, A contient tous ces points d'adhérence).

Posons $x^n = (x^n_k)_{n\geq 1} = (1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, \ldots) \in A$.

On a $x^n \to (1, 1, \ldots 1, \ldots)\ (n \to \infty)$, car, par construction, $\|x^n - (1, \ldots 1, \ldots)\|_\infty = \|(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots -\frac{1}{n} \ldots)\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0\ (n\to\infty)$. Or, $x^0 = (1, \ldots, 1, \ldots) \notin A$.

Déterminons A° et $\bar{A}$:

Pour A° : on affirme que $A^\circ = B(0,1)$ (on comprend $B_{l^\infty}(0,1)$). En effet, $B(0,1)$ est ouverte, $B(0,1) \subset A$, et donc.

$B(0,1) \subset A^\circ$. Par absurde (N°), supposons que $B(0,1) \not\subseteq A^\circ$, ou bien $\exists x \in A^\circ \setminus B(0,1)$; cela veut dire que $\|x\|_\infty = a \geq 1$. D'autre part, comme A° est ouvert, $\exists r>0$: $B(x,r) \subset A^\circ \subset A$.

Les cas particuliers:

1) $\|x\|_\infty = a > 1$. Alors $x \in B(x,r) \subset A^\circ \subset A$, contradiction.

2) $\|x\|_\infty = 1$. Alors ou bien:

2.a) $\exists(\varphi_n)$: $x_{\varphi_n} \to 1$ $(n\to\infty)$

ou bien 2.b) $\exists(\psi_n)$: $x_{\psi_n} \to -1$ $(n\to\infty)$

(les sous-suites $(\varphi_n),(\psi_n)$ sont infinies).

On considère le cas 2.a) (le cas 2.b) est identique, considérez $-x$ à la place de x). Alors on définit $y=(y_n)_{n\geq 1}$, $y = x + \frac{r}{2} = (x_n + \frac{r}{2})_{n\geq 1}$, et on raisonne comme dans $(*)$, p. 1. On conclue que $B(x,r) \not\subset A$, contradiction voulue.

Pour $\overline{A}$: on utilise le fait que:

$\overline{A} = \{x \in l^\infty : \exists (x^n) \subset A : x^n \to x \ (n\to\infty)\}$. Alors, $\overline{A} = \overline{B}(0,1)$. En effet, $\forall x \in \overline{B}(0,1)$ on a $\|x\|_\infty \leq 1$ et $\sup_k |x_k| \leq 1$. Définissons $x^n = (1-\frac{1}{n})x$.

On a (la vérification est facile):

- $(x^n)_{n\geq 1} \subset A$; • $\|x^n - x\|_\infty = \|(1-\frac{1}{n})x - x\|_\infty =$

$$= \|\tfrac{1}{n}x\|_\infty = \tfrac{1}{n}\cdot\|x\|_\infty \leq \tfrac{1}{n} \to 0 \ (n\to\infty)$$

Donc, $x \in \overline{A}$. Il est facile de montrer que si $x \in l^\infty$, $\|x\|_\infty > 1$, alors on a $x \notin \overline{A}$, d'où la conclusion voulue.

(Exo 7) $\blacksquare$