TGM601 2019

Correction du DM, à rendre la semaine du 4/03/2019 C1.

Exo 1. Puisque l'exo a été traité en détail en TD, on donne une correction très succinte.

a) Soit (X,d) un e.m. On dit que $(x^n)_{n=1,\dots\infty} \subset X$ est une suite convergente, ssi $\exists x^0 \in X$ t.q. $d(x^n, x^0) \to 0$ $(n \to \infty)$. $(x^n)_n \subset X$ est une suite de Cauchy, ssi $d(x^n, x^m) \to 0$ $(n, m \to \infty)$. L'e.m. (X,d) est complet, si toute suite de Cauchy ds cet espace est une suite convergente (l'inverse est tjs vraie).

b) cf. c) (le cas $d=\infty$ qui est plus compliqué que le cas $d<\infty$).

c). Traitons le cas $1 \leq p < \infty$, le cas $p=\infty$ est analogue.

Soit $(x^n)_n \subset \ell^p$, $x^n = (x^n_1, \dots x^n_j, \dots)$.

On doit démontrer que si $(x^n)_n \subset \ell^p$ est Cauchy, alors la suite converge, i.e. $\exists x^0 \in \ell^p : x^n \to x^0$ $(n \to \infty)$.

On a donc:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n, m \geq N : \|x^n - x^m\|_p^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x^n_j - x^m_j|^p < \varepsilon^p.$$

Pour tout $j_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a: $|x^n_{j_0} - x^m_{j_0}|^p \leq \|x^n - x^m\|_p^p < \varepsilon^p$. Donc la suite $(x^n_{j_0})_n \subset \mathbb{R}$ est Cauchy, et comme $\mathbb{R}$ est complet, $x^n_{j_0} \to x^0_{j_0}$ $(n \to \infty)$. Faisons ce procédé pour tout $j_0 \in \mathbb{N}^*$. On obtient $x^0 = (x^0_1, x^0_2, \dots x^0_j, \dots)$.

Il reste à démontrer que :

c.1) $x^n \to x^0$ ($n \to \infty$, en métrique $\|\cdot\|_p$),

c.2) $x^0 \in \ell^p$.

<u>Pour c.1)</u> : pour tout M :

$$\sum_{j=1}^{M} |x_j^n - x_j^m|^p \le \|x^n - x^m\|^p < \varepsilon^p.$$

On passe à la limite $x_j^m \to x_j^0$ ($m \to \infty$, $j = 1, \dots M$; il est important que le passage à la limite se fait dans un nombre fini de termes). On a donc :

$$\sum_{j=1}^{M} |x_j^n - x_j^0|^p \le \varepsilon^p$$; ceci est vrai $\forall M$ (et la majoration n'en dépend pas !), donc, $M \to \infty$ et

$\|x^n - x^0\|_p^p \le \varepsilon^p$. Ceci revient à dire que $x^n \to x^0$ ($n \to \infty$).

<u>Pour c.2)</u> : on a :

$$\|x^0\|_p = \|(x^0 - x^n) + x^n\|_p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inégalité} \\ \text{triang.}}}{\le} \underbrace{\|x^0 - x^n\|_p}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|x^n\|_p}_{< \infty} < \infty$$

et donc $x^0 \in \ell^p$,

d'où la conclusion voulue.

<u>Exo. 2</u>

a) Considérons 2 cas :

<u>a.1)</u> $F = E$; alors $F^\circ = E^\circ = E$, car E (= l'espace tout entier) est ouvert.

<u>a.2)</u> $F \subsetneq E$ ($F \ne E$). Dans ce cas $F^\circ = \emptyset$.

En effet, $F^\circ = \{x \in F : \exists r = r(x) > 0 \text{ t.q. } B(x, r) \subset F\}$.

Comme $F \ne E$, $\exists y \in E \setminus F$, $y \ne 0$. Par rénormalisation, on peut supposer que $\|y\|=1$.

Soit $x\in F$ - un pt. arbitraire ; supposons qu'il y a $r>0$ t.q. $B(x,r)\subset F$. Or $x+\varepsilon y\in B(x,r)$, $|\varepsilon|<r$ et $x+\varepsilon y\notin F$ (sinon par la linéarité $y\in F$, contradiction). On constate donc que l'inclusion $B(x,r)\subset F$ est impossible, d'où le résultat.

---

b) (X,d) est un e.m., $a,b\in X$ et $A=\{x\in X : d(x,a)=d(x,b)\}$. Montrons que si $(x^n)_n\subset A$, et $x^n\to x^0$ $(n\to\infty)$, alors $x^0\in A$. En effet, par la continuité de la distance :

$$\begin{array}{ccc} d(x^n,a) & = & d(x^n,b) \quad (n\to\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \\ d(x^0,a) & & d(x^0,b) \end{array}$$

$\Rightarrow d(x^0,a)=d(x^0,b)$, et par conséquent, $x^0\in A$.

---

c). Il est facile de voir que

$$B=B_\alpha\cap B_\beta=\overbrace{\{x\in X:\ \alpha<d(x,a)+d(x,b)\}}^{B_\alpha}\cap\underbrace{\{x\in X : d(x,a)+d(x,b)<\beta\}}_{B_\beta},$$

il suffit donc de démontrer que B_α et B_β sont ouverts. Cela étant dit, il suffit aussi de considérer la situation $\alpha<\beta$, sinon $B=\emptyset$ et l'ensemble est ouvert par la définition.

Montrons que B_β est ouvert ; la démo pour B_α est similaire.

Pour tout $x \in B_\beta$, il suffit de trouver $\delta > 0$ t.q. $B(x,\delta) \subset B_\beta$. En effet, soit $x \in B_\beta \Rightarrow$

$$d(x,a) + d(x,b) = \beta - \underset{\varepsilon > 0,\ \text{fixé}}{\varepsilon} < \beta.$$

Choisissons $\delta = \varepsilon/2$; pour tout $y \in B(x,\delta) = B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ on a :

$$d(y,a) + d(y,b) \underset{\text{inégalités triang.}}{\leq} \overbrace{d(y,x)}^{<\varepsilon/2} + d(x,a) + \overbrace{d(y,x)}^{<\varepsilon/2} + d(x,b) <$$

$$< d(x,a) + d(x,b) + \varepsilon = (\beta - \varepsilon) + \varepsilon = \beta,$$ ce qu'il fallait.

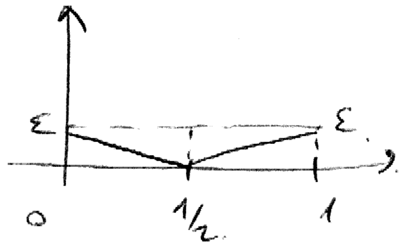
Exo. 3 Cet exercice est similaire à l'Exo. 9, TD1 ; on donne donc une correction brève de cet exercice.

$$A = C^1[0,1] \cap B(0,1) = \{ f \in C^1[0,1] : \|f\|_\infty < 1 \}.$$

a) Notons par $f_\varepsilon(x) = \varepsilon |x - 1/2|$.

$f_\varepsilon \in C[0,1]$, $\|f_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon$,

mais $f_\varepsilon \notin C^1[0,1]$.



Par conséquent : a.1) A n'est pas ouvert (car

$$\underset{f \in C^1[0,1]}{f} + \underset{\varepsilon < \delta}{f_\varepsilon} \in B(f,\delta), \text{ et } f + f_\varepsilon \notin C^1[0,1])$$

a.2). A n'est pas fermé (car on peut approcher n'importe quelle fonction $g \in C[0,1]$, $\|g\|_\infty < 1$ avec une suite $(g_n) \in A$, $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ (choisissez les polynômes pour la suite (g_n) et appliquez le théorème de Weierstrass)).

b) Pour les mêmes raisons :

b.1) $A^\circ = \emptyset$, b.2) $\overline{A} = \overline{(B(0,1))} = \overline{B}(0,1)$

(car on peut approcher n'importe quelle fonction $g \in B(0,1)$ avec les fonctions de A).

c) Puisque $\overline{A} = \overline{B}(0,1)$, A est dense dans $\overline{B}(0,1)$ (par la définition !)

Exo. 4 (cet exercice reprend l'exo sur la compacité dans $C[0,1]$ fait en TD ; notamment, on y a montré que la boule $B_{C^1[0,1]}(0,1)$ (que l'on prend ds $C^1[0,1]$) est pré-compacte ds $C[0,1]$; on a utilisé le thm. d'Ascoli).

a) On pose

$$A = \mathcal{P}[0,1] \cap \overline{B}(0,1) = \{p \in \mathcal{P}[0,1] : \|p\|_\infty \leq 1\}.$$

Par le thm. de Weierstrass (cf. la discussion de l'exo précédent), on a $\overline{A} = \overline{B}(0,1)$. Il est donc impossible que A soit pré-compact, car ds ce cas $\overline{A}$ doit être compact, et $\overline{B}_{C[0,1]}(0,1)$ ne l'est pas. (par conséquent, A n'est pas compact non plus).

b) $B_M = \{p \in \mathcal{P}[0,1] : p(0) = 0, |p'(x)| \leq M\}$,

où M est une constante fixée. Par Ascoli, cet ensemble est pré-compact, en effet :

6.1) On doit montrer qu'il existe C_M, t.q. $\forall p \in B_M : \|p\|_\infty \leq C_M$. Or,

$$|p(x)| = |p(x) - p(0)| \underset{\text{Leibniz}}{=} \left| \int_0^x p'(s)\,ds \right| \leq \int_0^x |p'(s)|\,ds \leq M \cdot \int_0^x ds$$

$$\leq M \cdot x \underset{x \in [0,1]}{\leq} M.$$

Donc $\|p\|_\infty = \sup_{[0,1]} |p(x)| \leq M =: C_M$.

6.2) La famille de fonctions de B_M est équicontinue, car toutes les $p \in B_M$ sont Lipschitz avec la même const. de Lipschitz: $(x \geq y)$.

$$|p(x) - p(y)| = \left| \int_y^x p'(s)\,ds \right| \leq \int_y^x |p'(s)|\,ds \leq M \cdot \int_y^x ds =$$

$$= M(x-y)$$ (idem pour $y \geq x$).

Donc B_M est pré-compact. $\blacksquare$