TGM 601, 2019 U. Bordeaux

Correction de l'Exo. 22, TD 2 + l'Exo. 1, TD 3.

On corrige ces exercices dans le cas d'espace $X = c_0$, la correction est similaire ds le cas $X = \ell^p$, $1 \le p \le \infty$.

Exo. 22, TD 2 1) Soit $T_\Lambda : c_0 \to c_0$, et pour $x = (x_n)_{n\geq 1}$ $(T_\Lambda x)_n = \lambda_n x_n$, $n \geq 1$ (et la suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geq 1}$ est donnée et fixée une fois pour tout).

En plus de détail, si

$$x = (x_1, x_2, \dots\ x_n, \dots)$$
$$\downarrow$$
$$T_\Lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots\ \lambda_n x_n, \dots).$$

D'une manière équivalente, on peut dire que $T_\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_n)$ (une matrice diagonale ds la base standard de c_0).

Il est claire que T_Λ est une application linéaire. Si on suppose que $\sup_n |\lambda_n| = M < \infty$, on constate que T_Λ est continue (bornée) et $\|T_\Lambda\|_0 = M$.

En effet:

a) montrons que $\|T_\Lambda x\|_\infty \le M \cdot \|x\|_\infty$ $\forall x \in c_0$. On a:

$$\|T_\Lambda x\| = \sup_n |(T_\Lambda x)_n| = \sup_n |\lambda_n x_n| \le \sup_n |\lambda_n| \cdot \sup_n |x_n| =$$
$$= M \cdot \|x\|_\infty.$$

b) trouvons une suite de vecteurs-tests $(x^n) \subset c_0$ t.q. $\|x^n\|_\infty = 1$, et $\|T_\Lambda x^n\|_\infty \to M$.

Par la déf. de sup, $\exists (\varphi(n))$ t.q. $|\lambda_{\varphi(n)}| \to M$ $(n \to \infty)$.

On pose alors $x^n = e^{\varphi(n)}$ (les vecteurs de base standard), et $\|x^n\|_\infty = 1$, $\|T_\Lambda x^n\|_\infty = \|T_\Lambda e^{\varphi(n)}\|_\infty = \|\lambda_{\varphi(n)} e^{\varphi(n)}\|_\infty =$

$= |\lambda_{\varphi(n)}| \to M$.

Donc $\|T_\Lambda\|_0 = M = \sup\limits_n |\lambda_n|$. De la même manière on montre que T_Λ n'est pas continue (est non-bornée) ssi $\sup\limits_n |\lambda_n| = +\infty$ (i.e., la suite $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ est non-bornée).

2) On suppose que $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ est telle que $\lambda_n \neq 0$ $\forall n$. On constate que T_Λ est injective ssi

$T_\Lambda x = T_\Lambda x' \Rightarrow x = x'$, ou bien

$\operatorname{Ker} T_\Lambda = \{x : T_\Lambda x = 0\} = \{0\}$. Resolvons l'équation $T_\Lambda x = 0 \Leftrightarrow T_\Lambda x = (\lambda_n x_n)_n = 0$. On re-écrit cette égalité composante par composante, c.à.d. $\lambda_n x_n = 0$ $\forall n \geq 1$. Or, $\lambda_n \neq 0 \Rightarrow x_n = 0$ $\forall n \geq 1$ et donc $x = 0$. Par conséquent, T_Λ est injective.

3). ??? La CNS pour la surjectivité de T_Λ.

L'intuition qui vient du thm. d'application ouverte (ou bien le thm. d'application inverse) indique que la condition en question est

$\inf\limits_n |\lambda_n| \geq \delta > 0$. $(*)$

a) Vérifions que $(*)$ guarantit que T_Λ est surjective.

Pour cela $\forall y \in c_0$, on cherche à trouver $x \in c_0$ t.q. $T_\Lambda x = y$. En résolvant composante par composante, on trouve $\lambda_n x_n = y_n$, ou bien $x_n = 1/\lambda_n \, y_n$ (bien défini, car $\lambda_n \neq 0$). Reste à montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. En effet,

$$|x_n| = \left|\frac{1}{\lambda_n} y_n\right| \leq \sup_n \frac{1}{|\lambda_n|} \cdot |y_n| = \frac{1}{\inf_n |\lambda_n|} \cdot |y_n| \leq \frac{1}{\delta} |y_n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

car $|y_n| \to 0 \ (n \to \infty)$.

D'autre part, on peut vérifier que si $\inf_n |\lambda_n| = 0$, l'appli. T_Λ n'est pas surjective (cf. la démo faite en TD).

Exo. 1, TD3 (ds le cas $X = c_0$). On a répondu à la question 1) au début de l'Exo. 22. Passons donc à la question 2).

2a) Calcul de vecteurs/valeurs propres. Il est facile de voir que $\forall n \geq 1 : T_\Lambda e^n = \lambda_n e^n$, donc les vecteurs propres $= e^n$, les valeurs propres $= \lambda_n$.

2b) Le calcul de la résolvante $(T_\Lambda - \lambda)^{-1}$ et du spectre $\sigma(T_\Lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T_\Lambda - \lambda)^{-1}$ n'est pas défini ou bien est non-bornée $\}$. Il est facile de voir que, pour $x = (x_n)_{n\geq 1}$,

$((T_\Lambda - \lambda)x)_n = ((\lambda_n - \lambda) x_n)_{n \geq 1}$, et donc $(\lambda \neq \lambda_n)$:

$$((T_\Lambda - \lambda)^{-1} x)_n = \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda} \cdot x_n\right)_{n \geq 1}.$$

Supposons que $d(\lambda, \Lambda) = \inf_n |\lambda - \lambda_n| = \delta > 0$.

Alors la résolvante est bornée:

$$\|(T_\Lambda-\lambda)^{-1}x\|_\infty = \sup_n \left|\frac{1}{(\lambda_n-\lambda)}\cdot x_n\right| \le \sup_n \frac{1}{|\lambda_n-\lambda|}\cdot \sup_n |x_n|$$

$$\le \frac{1}{\inf_n|\lambda_n-\lambda|}\cdot \sup_n |x_n| = \frac{1}{d(\lambda,\Lambda)}\cdot \|x\|_\infty.$$

D'autre part, on voit que si $\underset{(\lambda\neq\lambda_n)}{d(\lambda,\Lambda)=0}$, $\|(T_\Lambda-\lambda)^{-1}\|=$ $=+\infty$. Si $\lambda=\lambda_n$, $(T_\Lambda-\lambda)^{-1}$ n'est pas définie. Par conséquent, $6(T_\Lambda)=\{\lambda\in\mathbb{C}: d(\lambda,\Lambda)=0\}=\overline{\Lambda}$

exercice !!!

Exos. 22, 1.

<u>Exemple</u>: si $\Lambda=(\lambda_n)=(1+\frac{1}{n})_{n\ge1}$, alors

$$6(T_\Lambda)=\overline{(1+\tfrac{1}{n})_{n\ge1}}=(1+\tfrac{1}{n})_{n\ge1}\cup\{1\}.$$

l'adhérence