Feuille d'exercices n° 1.

Exercice 1. Soient E un espace métrique et A et B deux parties de E. Montrer que:

(a) Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $A^\circ \subset B^\circ$.

(b) A est ouvert ssi $A = A^\circ$.

(c) B est fermé ssi $B = \bar{B}$.

(d) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et cette inclusion peut être stricte.

(e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ et cette inclusion peut être stricte.

Exercice 2. Sur $X =]0, +\infty[$ on définit $d(x,y) = |\ln \frac{x}{y}|$. Montrer que d est une distance. Expliciter les boules $B(x,r)$. Quelle est la topologie associée à d?

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}$ et d donnée par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &d(s,t) = |\arctan s - \arctan t|, \quad d(s,t) = |e^s - e^t|, \\ &d(s,t) = e^{|s-t|} - 1, \quad d(s,t) = \cos^2(t-s), \\ &d(s,t) = |2s^2 - 3t^2|, \quad d(s,t) = |s^2 - t^2|. \end{aligned}$$

Dans quels cas (E,d) est un espace métrique?

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique et f une application croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant:

(i) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

On définit $\delta(x,y) = f(d(x,y))$, $(x,y) \in E^2$.

(a) Montrer que δ est une distance.

(b) On suppose que f est continue à droite en 0. Démontrer que δ et d définissent les mêmes topologies.

Exercice 5. Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.

(a) Montrer que $\overline{A} = \cap_{r>0} V_r(A)$ où $V_r(A) = \{x \in E, d(x,A) < r\}$.

(b) En déduire que tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts. Que peut–on dire pour les ouverts?

(c) Donner un exemple d'une réunion dénombrable de fermés qui n'est pas fermée; idem pour l'intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 6. Soient p et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Soient $a, b > 0$. Montrer que $ab = \inf_{t>0} \frac{t^p}{p} a^p + \frac{t^{-q}}{q} b^q$.

(b) En déduire que pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(c) En remarquant que $|x_i + y_i|^p \leq |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ démontrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

et en déduire que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(d) Pour $p \geq 1$ on désigne par ℓ^p l'ensemble des suites réelles ou complexes $x = (x_n)_n$ telles que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Montrer que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur ℓ^p.

Exercice 7. On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées et on pose $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|$ où $x = (x_n)_{n \geq 0}$ sont dans ℓ^∞.

(a) Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme.

(b) Soit $A = \{x \in \ell^\infty; \forall n \geq 0, |x_n| < 1\}$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A dans ℓ^∞. L'ensemble A est–il ouvert? est–il fermé?

Exercice 8.

(a) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0, 1]\}, \quad (f \in E).$$

Soit $A = \{f \in E :\ \forall x \in [0, 1] :\ |f(x)| < 1, \}$. Montrer que A est un ouvert de E. Déterminer son adhérence.

(b) Soit $B = \{f \in E :\ \forall x \in [0, 1] :\ 1 < f(x) < 5\}$. Montrer que B est un ouvert de E. Déterminer son adhérence.

(c) Soit maintenant F l'espace des fonctions continues et bornées sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, muni de la distance

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in]0, 1[\}, \quad (f \in F).$$

Soit $B = \{f \in F :\ \forall x \in]0, 1[:\ |f(x)| < 1, \}$. B est–il un ouvert de F? quel est son intérieur?

Exercice 9. L'espace $\mathcal{P}[0, 1]$ de polynômes sur l'intérvalle $[0, 1]$ est-il ouvert dans $C[0, 1]$? fermé dans $C[0, 1]$?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E. Déterminer l'intérieur de F.

Exercice 11. Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de Cauchy dans E. On suppose que (x_n) admette une sous-suite extraite qui converge vers l. Montrer que (x_n) converge vers l.

Exercice 12. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) E est complet.

(b) Toute suite $(x_n)_n$ telle que $\sum_n d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$ est convergente.

(c) Toute suite $(x_n)_n$ telle que pour tout n, $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$ est convergente.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que E est nécessairement complet.

Exercice 14. On considère les ensembles de suites réelles ou complexes suivants:

$$\ell^p = \{x = (x_n) | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty\}, \quad p \in [1, +\infty[\quad \text{et} \quad \ell^\infty = \{x = (x_n) | \sup_n |x_n| < +\infty\},$$

et c_0 l'espace des suites qui tendent vers 0. On les munit par les normes $\|x\| = \sup_n |x_n|$ pour c_0 et ℓ^∞, $\|x\|_p$ pour ℓ^p.

(a) Démontrer que ce sont des espaces vectoriels normés complets.

(b) On appelle c_{00} l'ensemble des suites réelles nulles a partir d'un certain rang. Montrer que c_{00} est dense dans c_0. L'espace métrique c_{00} est–il complet?

(c) Démontrer que les injections de ℓ^p dans c_0 et c_0 dans ℓ^∞ sont continues. Calculer leur norme.

(d) Soit p et q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que si $x \in \ell^p$ alors $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ et donc $\ell^p \subset \ell^q$.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

(a) L'application $P \mapsto \int_0^1 |P(x)| \, dx$, est-elle une norme sur E?

(b) L'application $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n |a_i|$, est-elle une norme sur E?

(c) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \ a_n = 1\}$. Montrer que

$$\inf_{P \in A} \int_0^1 |P(x)| \, dx =: \alpha > 0$$

Exercice 16. Soit (E,d) un espace métrique. Si A est une partie de E, le diamètre de A est défini par $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A \times A} d(x,y)$. Démontrer que E est complet si et seulement si pour toute suite décroissante $(F_n)_n$ de fermés non vides de E, tels que $\lim_{n \to +\infty} \delta(F_n) = 0$, on a $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Exercice 17. Soit E un espace métrique et (K_n) une suite décroissante de compacts non-vides de E.

(a) Montrer que $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

(b) Si Ω est un ouvert contenant l'intersection des K_n, montrer qu'il existe un n tel que $K_n \subseteq \Omega$.

Exercice 18. Soit E un espace métrique compact. Démontrer que pour qu'une suite soit convergente, il faut et il suffit qu'elle admette une seule valeur d'adhérence. Donner un contre-exemple à ceci si E n'est pas compact.

Exercice 19. Soient A, B des paries compactes disjointes d'un espace métrique E. Montrer qu'il existent des voisinages séparantes, c'est à dire des ouverts U, V tel que $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 20. Soient X, Y deux espaces métriques. On suppose que Y est compact. Montrer que $f : X \to Y$ est continue si et seulement si son graphe est fermé.