Feuille d'exercices n° 3'.

Exercice 1 Rappeler le théorème du graphe fermé pour les espaces de Banach et la démontrer.

Exercice 2 Soit E un e.v.n. qui est complet pour deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose qu'il existe une constante positive c telle que pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. Montrer que ces deux normes sont équivalentes.

Exercice 3 Considérons la forme linéaire définie sur $(\mathbb{R}^{d_1}, ||.||_1)$ et donnée par

$$T_a(x) = T(x) = \sum_{k=1}^{d_1} a_k x_k, \quad x = (x_k)_{k=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^{d_1},$$

où $a = (a_k)_{k=1,\ldots,d}$.

(a) Calculer la norme de T; on obtient alors $(\mathbb{R}^{d_1}, ||.||_1)^* = (\mathbb{R}^{d_1}, ||.||_\infty)$.

(b) Soit $d_1 \leq d_2$. Donner un exemple de l'extension de T de $(\mathbb{R}^{d_1}, ||.||_1)$ à $(\mathbb{R}^{d_2}, ||.||_1)$ selon Hahn-Banach (i.e., sans augmenter la norme de l'extension par rapport à $||T||$).

(c) Décrire toutes les extensions de T à $(\mathbb{R}^{d_2}, ||.||_1)$ selon Hahn-Banach.

(d) Idem pour l'extension de T de $(\mathbb{R}^{d_1}, ||.||_1)$ à l^1.

Exercice 4 (les corollaires du théorème de Hahn-Banach)
Soit E un evn.

(a) Soit $M \subset E$ un sous-espace et $x \in E \backslash M$. Montrer qu'il y a $f \in E^*$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f\big|_M = 0$. Plus précisemment, si on pose

$$\delta = d(x, M) = \inf_{y \in M} ||x - y||,$$

alors on peut choisir $f(x) = \delta$ et $||f|| = 1$.

(b) Si $x \in E, x \neq 0$ alors il y a $f \in E^*$ telle que $f(x) = ||x||$ et $||f|| = 1$.

(c) Les éléments de E^* sont séparants sur E, c.à.d., pour $x^1, x^2 \in E,\ x^1 \neq x^2$ il y a un $f \in E^*$ tel que $f(x^1) \neq f(x^2)$.

(d) Posons $E^{**} = (E^*)^*$, le bidual de E. Pour un $x \in E$, on définit

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad f \in E^*.$$

Montrer que : a) l'application $x \mapsto \hat{x}$ est linéaire; b) $||\hat{x}|| = ||x||$, i.e. c'est une isométrie de X dans X^{**}.

Exercice 5 Soit E un espace de Banach.

(a) Soit B une partie de E. Montrer que B est borné si et seulement si pour e tout $f \in E'$, $f(B)$ est borné.

(b) Soit B' une partie de E'. Montrer que B' est borné dans E' si et seulement si pour tout $x \in E$, $\{f(x) : \ f \in B'\}$ est borné.

(c) Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement. Montrer que (x_n) est borné.