TMF 704, 2018

Correction de quelques exercices.

Exo 1 Soit $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$. Donner le développement de Laurent dans les domaines :
$O_1=\{z : |z|<1\}$, $O_2=\{z : 1<|z|<2\}$,
$O_3=\{z : |z|>2\}$.

Solution : La décomposition en fraction simples donne :

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right).$$

Nous avons donc :

1) pour O_1 :

$$f(z)=-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-z}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\underset{|z|<1,\ |z/2|<1}{=}-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}z^k-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{2^k}=$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{(-1)^k}{6\cdot 2^k}\right)z^k=-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right)z^k.$$

2) pour O_2 : $|z/2|<1$, mais $|z|>1$ $(\rightarrow |1/z|<1)$.

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\underbrace{\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}}_{\text{la partie "principale" de la série}}-\underbrace{\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{2^k}}_{\text{la partie holomorphe}}.$$

3) pour O_3 : $|z|>2 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1, \frac{1}{|z|}<1$.

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}-$$

$$-\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(1-2^k)\cdot\frac{1}{z^{k+1}}.$$

Exo. 2 (= Exo. 45 de la liste d'exercices, les intégrales 3, 4).

a) calculer $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^4}dx$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^4+1}dx \underset{\uparrow}{=} \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}dx \underset{\uparrow}{=}$$

l'intégrale converge

$\Gamma_R=[-R,R]\cup\gamma_R$, où $\gamma_R=\{Re^{it}: t\in[0,\pi]\}$.

Notons que

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}dz\right|\to 0 \quad (R\to+\infty, \text{ cf. Exo. 44}).$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^4+1}dz \underset{\uparrow}{=}$$

$f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ a 4 pôles d'ordre 1 : $z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}$; on prend les pôles à l'intérieur de Γ_R

$$= 2\pi i\left(\text{Rés}(f,e^{i\frac{\pi}{4}})+\text{Rés}(f,e^{i\frac{3\pi}{4}})\right)\boxed{=} \qquad (1)$$

A l'aide de la formule pour les Rés(f,a), on a :

$$\text{Rés}(f,e^{i\frac{\pi}{4}})=\lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{4}}}\frac{(z-e^{i\frac{\pi}{4}})}{(z^4+1)} \underset{\uparrow}{=}$$

Bernoulli-l'Hôpital.

$$= \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Idem pour $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$\text{Rés}\left(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$. En revenant à (1), on a :

$$\boxed{=} -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \pi\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}\right) = \pi \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

---

b) calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$. On applique la même méthode (les notations sont les mêmes que dans a)).

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz =$$

$$= \lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2}\,dz = 2\pi i \cdot \text{Rés}(f, i) \boxed{=} \qquad (2).$$

$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$, 2 pôles d'ordre 2 :

$z_1 = i$, $z_2 = -i$

On a

$$\text{Rés}(f, i) = \frac{1}{1!}\left((z-i)^2 \cdot \frac{1}{(1+z^2)^2}\right)'\Bigg|_{z=i} = \left((z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}$$

$$= -\frac{2}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{1}{4} i$$

En revenant à (2), on a :

$$\boxed{=} 2\pi i\left(-\frac{1}{4} i\right) = \frac{\pi}{2}.$$