# TD

• **Exercice 1.**
On pose
$$\begin{cases} u(x,y) = & e^x(x\cos y - y\sin y) \\ v(x,y) = & e^x(y\cos y + x\sin y). \end{cases}$$
Montrer que $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe pour toute valeur de $z$. Exprimer $f$ à l'aide de la seule variable $z$ et calculer $f'(z)$.

• **Exercice 2.**
Les fonctions suivantes sont-elles holomorphes ?
$f(x,y) = x - iy$, $g(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $h(x,y) = \exp(x - iy)$.

• **Exercice 3.**
Soit $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.
(1) Montrer qu'en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$) les conditions de Cauchy–Riemann s'expriment par
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \ (\ r \neq 0\ )\ .$$
(2) Est-ce que $f(z) = z + \overline{z}$ est holomorphe ?
(3) Trouver toutes les fonctions réelles $\varphi \in C^1(]0,+\infty[)$ telles que la fonction $f(re^{i\theta}) = e^{\varphi(r)+i\theta}$ est holomorphe pour $re^{i\theta} \neq 0$.

• **Exercice 4.** Soit $f$ une fonction holomorphe non constante sur le disque $D(0,r)$. Montrer que $z \to \overline{f(z)}$ n'est pas holomorphe sur $D(0,r)$ et que $z \to \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $D(0,r)$.

• **Exercice 5.** On définit la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ par
$$\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}.$$
(1) Rappeler pourquoi exp est bien définie sur $\mathbb{C}$ et vérifie $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.
(2) Montrer que $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
(3) En déduire que $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ et $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
(4) Calculer $\displaystyle\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} \frac{\exp(z) - \exp(z_0)}{z - z_0}$.
(5) En déduire que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(6) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(iy) = \cos y + i\sin y$.
(7) On définit les fonctions suivantes
$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))\ ,\ \sin z = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$

$$\text{ch } z = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) \ , \ \ \text{sh } z = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))$$

Démontrer que ces quatres fonctions sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

(8) Calculer $|\cos z|^2$, $|\sin z|^2$, $|\text{ch } z|^2$ et $|\text{sh } z|^2$.

(9) En déduire que l'ensemble des zéros des solutions de l'equation $\sin \pi z = 0$ est $\mathbb{Z}$.

**• Exercice 6.**

Déterminer une fonction holomorphe ayant $P(x, y) = x + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ comme partie réelle.

**• Exercice 7.**

Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega$ de $\mathbb{C}$ montrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $f$ est constante.
(2) $\text{Re } f$ est constante.
(3) $\text{Im } f$ est constante.
(4) $|f|$ est constante.

**• Exercice 8.** Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$. Montrer que $u$ et $v$ sont des fonctions harmoniques sur $\Omega$. C'est–à–dire solutions de l'equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Montrer que si la fonction réelle $u$ est harmonique sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$, la fonction $f$ donnée par

$$f(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

est holomorphe sur $\Omega$.

**• Exercice 9.**

Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$. Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial z}(\text{Re} f(z)) = \frac{f'(z)}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(|f(z)|)) = \frac{f'(z)|f(z)|}{2f(z)}, \qquad f(z) \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(|f(z)|^2) = |f'(z)|^2.$$

(On utilisera le fait que si $f$ est holomorphe, alors $f'$ est holomorphe).

• **Exercice 10.**
Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$. Calculer

$$e^{2\mathrm{Re} f}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}[(\mathrm{Re} z)^2 - (\mathrm{Im} z)^2]e^{2\mathrm{Re} f}.$$

• **Exercice 11.** Ecrire le développement en série entière à l'origine des fonctions suivantes:

$$\frac{z}{z-1}, \qquad \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Préciser leur rayon de convergence.

• **Exercice 12.**
On définit la fonction $\phi$ par la série entière

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Déterminer le rayon de convergence $R$ de $\phi$, et dire si elle converge sur l'adhérence de son disque de convergence.
Pour tout $\epsilon > 0$, trouver un $n_\epsilon > 0$ tel que, pour tout $m \geq n_\epsilon$, on ait

$$\Big| \sum_{n \geq m}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2} \Big| < \epsilon, \qquad z \in D(0, R).$$

Montrer que $\phi$ vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients polynomiaux.

• **Exercice 13.**
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{ni+1}{n-i} z^n, \quad \sum_{n\geq 1} \big(ni - \frac{1}{n}\big) z^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1+in}{2^n - i} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} [3 + (-1)^n]^n z^n.$$

• **Exercice 14.**
Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un chemin $C^1$ par morceaux. On désigne par $|\gamma|$ la longueur de $\gamma$, donnée par

$$|\gamma| = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt.$$

Soit $f\ : \mathrm{Im}\gamma \to \mathbb{C}$ une application continue. On définit

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(s))\gamma'(s) ds.$$

(1) Montrer que

$$\Big| \int_\gamma f(z) dz \Big| \leq \sup_{z \in \mathrm{Im}\gamma} |f(z)| |\gamma|.$$

(2) Soit $\gamma$ le cercle de centre 0 et de rayon $R > |a|$ orienté positivement. Montrer que

$$\Big| \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z+a)} \Big| \leq \frac{2\pi R}{R^2 - |a|^2}.$$

• **Exercice 15.**

Calculer les intégrales $\int_\gamma f(z)dz$ dans les cas suivants avec $\gamma$ orienté positivement :

(1) $f(x+iy) = x$ et $\gamma$ est le polygone $[-i, -i+1, i+1, i, -i]$.
(2) $f(x+iy) = y$ et $\gamma$ est le demi-cercle unité supérieur.
(3) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ et $\gamma$ est un cercle de centre 0.
(4) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ et $\gamma$ est le rectangle de sommets $\pm a \pm ib$.
(5) $f(z) = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\gamma$ est le cercle unité.
(6) $f(z) = \frac{1}{z-a}$ et $\gamma$ est un cercle de centre $a$.

• **Exercice 16.**

Soit $P(z) = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i z^i$ un polynôme à coefficients complexes. Calculer

$$J_n = \int_\gamma P(z) z^n dz,$$

où $\gamma$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon $R$ orienté positivement.

• **Exercice 17.**

Soit $\gamma$ un chemin de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{\gamma}$ son image par l'application $z \to \bar{z}$. Montrer que si $f$ est une fonction continue sur $\operatorname{Im} \gamma$, la fonction $z \to \overline{f(\bar{z})}$ est continue sur $\overline{\gamma}$ et

$$\overline{\int_\gamma f(w)dw} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\bar{w})} dw.$$

Montrer que lorsque $\gamma = \partial D(0,1)$ on a

$$\overline{\int_{\partial D(0,1)} f(w)dw} = -\int_{\partial D(0,1)} \overline{f(w)} \frac{dw}{w^2}.$$

• **Exercice 18.**

Soit $f : D(0,2) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et soit $z \in D(0,1)$.

(1) Montrer que $\left| \dfrac{1 - \bar{z}e^{it}}{e^{it} - z} \right| = 1$.
(2) Calculer $\dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\partial D(0,1)} f(\zeta) \frac{1 - \bar{z}\zeta}{\zeta - z} d\zeta$.
(3) En déduire que $(1 - |z|^2)|f(z)| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |f(e^{it})| dt$.

• **Exercice 19.**

(1) Calculer $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^k}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(2) En déduire que $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = 2i\pi \binom{2n}{n}$.

(3) Majorer $\displaystyle\left| \int_{\partial D(0,1)} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz \right|$.

(4) En déduire que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

(5) On pose $u_n(z) = \dfrac{(1+z)^{2n}}{A^n z^{n+1}}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(e^{it})$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

(6) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_{\partial D(0,1)} u_n(z) dz = -A \int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 - (A-2)z + 1}$.

(7) Calculer $\displaystyle\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z^2 - (A-2)z + 1}$.

(8) Montrer que la série que la série ci–dessous converge et la calculer

$$I(A) = \sum_{n\geq 0} A^{-n} \binom{2n}{n}.$$

(9) Peut-on calculer $I(4)$ ?

• **Exercice 20.**

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{\cos z}{z} dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial D(0,1)} \frac{\cos z^2}{z} dz$$

• **Exercice 21.**

Calculer

$$\int_{\partial D(0,1)} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t dt.$$

• **Exercice 22.**

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert tel que $\overline{D(0,1)} \subset U$ et soit $f \in \mathrm{Hol}(U)$. Calculer

$$\int_{\partial D(0,1)} (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial D(0,1)} (2 - z - \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2(t/2) dt.$$

• **Exercice 23.**

Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{|z|=1}\Big(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\Big)dz,\quad \int_{|z|=2}\Big(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1-i}\Big)dz,$$

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2+3z+7}{z-w}dz,\quad \int_{|z|=1}\frac{z^2+3z+7}{(z-w)^2}dz,\quad |w|\neq 1,$$

$$\int_{|z+i|=3}\sin z\frac{dz}{z+i},\quad \int_{|z|=4}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2},\quad \int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^n(z-3)}.$$

• **Exercice 24.**

Déterminer un chemin fermé $\gamma$ tel que l'image de $\gamma$ soit l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Calculer

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

En déduire la valeur de

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}.$$

• **Exercice 25.**

Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$ tel que $|\lambda|\neq 1$. On pose

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos(n\theta)d\theta}{\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1}.$$

Vérifier que $I$ est bien définie. Soit maintenant la fonction $f(z)=\dfrac{z^n}{(z-\lambda)(z-\lambda^{-1})}$. Calculer

$$\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)d\zeta.$$

Trouver la valeur de $I$ en distinguant les deux cas $|\lambda|>1$ et $|\lambda|<1$.

• **Exercice 26.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega\subset\mathbb{C}$.

(1) Montrer que si $f+\overline{g}$ est réelle, alors $f=g+C$, pour $C\in\mathbb{R}$.
(2) Montrer que si $f\overline{g}$ est réelle, avec $g$ non nulle, alors $f=Cg$ pour $C\in\mathbb{R}$.
(3) Montrer que si $g\circ f$ est constante, alors $f$ ou $g$ est constante.
(4) Montrer que si $|f|^2+|g|^2$ est constante, alors $f$ et $g$ sont constantes.

• **Exercice 27.**

Soit $\Omega\subset\mathbb{C}$ un ouvert connexe. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f\ :\ \Omega\to\Omega$ telles que $f(f(z))=f(z)$, pour tout $z\in\Omega$

**• Exercice 28.**

Soit $f$ une fonction entière telle que il existe deux constantes positives $A$ et $B$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ telles que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^n, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $f$ est un polynôme de degré au plus $n$.

**• Exercice 29.**

Soit $f$ une fonction entière. Supposons que pour deux réels positifs $A$ et $B$ on a

$$|f(z)| \leq A + B|z|^{3/2}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Que peut-on dire sur $f$ ?

**• Exercice 30.**

Montrer qu'une fonction entière admettant 1 et $i$ comme période est constante.

**• Exercice 31.**

Soit $f$ une fonction entière telle que

$$|f(z)| \leq 1 + e^{|z|} \sin^2 |z|, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que $f$ est constante.

**• Exercice 32.**

Montrer qu'une fonction entière propre est polynomiale.

**• Exercice 33.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur un ouvert contenant $\overline{D(0,1)}$. On suppose que
(i) $f$ a au moins un zéro dans $D(0,1)$
(ii) $g$ est sans zéro dans $\overline{D(0,1)}$
(iii) $|f(e^{it})| = |g(e^{it})|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que $|f| < |g|$ sur $D(0,1)$.

**• Exercice 34.** Lemme de Schwarz.
Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.
1. Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
2. Montrer que si $\exists c \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tel que $|f(c)| = |c|$, ou si $|f'(0)| = 1$ alors il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $f(z) = e^{i\theta} z$.

**• Exercice 35.**

Soit $f$ une fonction continue sur $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \geq 0\}$ et holomorphe sur $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$. On suppose que

$$\sup_{z \in \overline{H}} |f(z)| \leq 10^{10} \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leq 1.$$

Montrer que

$$\sup_{z \in \overline{H}} |f(z)| \leq 1.$$

Indication. Considérer la fonction $g_\epsilon(z) = \dfrac{f(z)}{\epsilon z + i}$ pour $\epsilon > 0$.

**• Exercice 36.**

Soit $f$ une fonction non constante continue sur $\overline{\mathbb{C}_+} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geq 0\}$ et holomorphe sur $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > 0\}$. On suppose que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon > 0$ tel que

$$\forall z \in \overline{\mathbb{C}_+},\ |f(z)| \leq M_\epsilon e^{\epsilon \mathrm{Re} z} \quad \text{et} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(iy)| \leq 1.$$

Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}_+\,, \quad |f(z)| < 1.$$

Indication. Pour $\delta > 0$ et $A > 0$, considérer la fonction

$$g_\delta(z) = \frac{A}{z + A} f(z) e^{-\delta z}, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}_+}.$$

Vérifier que $|g_\delta| \leq 1$ sur $i\mathbb{R}$ et

$$\lim_{R \to +\infty} \max_{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |g_\delta(Re^{i\theta})| = 0.$$

**• Exercice 37.**

Soit $f$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe $\Omega$ contenant 0. Montrer que

(1) Si $f(1/n) = 1/(n+1)$ pour $n$ assez grand alors $f(z) = z/(1+z)$ sur $\Omega$.
(2) Si $f(1/n) = f(1/(2n))$ pour $n$ assez grand, alors $f$ est constante sur $\Omega$.
(3) $f(1/n) = 2^{-n}$ pour $n$ assez grand est impossible.

**• Exercice 38.** Détermination principale du logarithme.

Soit $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\ \mathrm{Im}\ z| < \pi\}$ et $D_2 = \mathbb{C} \backslash ]-\infty, 0[$.

(1) Démontrer que exp est une bijection de $D_1$ sur $D_2$. On notera log la bijection réciproque que l'on appellera détermination princiale du logarithme.
(2) Soit $u = re^{it}$ avec $r > 0, t \in ]-\pi, \pi[$. Exprimer $\log(u)$ en fonction de $r$ et $t$. Déterminer log sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\log(i)$ et $\log(-1+i)$.
(3) Montrer que log est continue sur $D_2$.

(4) Calculer pour $u_0 \in D_2$ $\lim\limits_{u \to u_0} \dfrac{\log(u) - \log(u_0)}{u - u_0}$. Conclusion ?

(5) Peut–on prolonger log continûment sur un ouvert contenant strictement $D_2$ ?

• **Exercice 39.**

Le produit infini ci-dessous est-il convergent ?

$$\prod_{n \geq 2} \Big(1 + \frac{\sin^2 z}{n \log n}\Big)$$

• **Exercice 40.**

Déterminer le développement en série de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

dans les régions suivantes $1 < |z| < 2$, $|z| < 1$, $|z| > 2$ et $0 < |z - 1| < 1$.

• **Exercice 41.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer la nature du point singulier 1 de la fonction

$$f_n(z) = (z - 1)^n \exp\big(\frac{1}{z - 1}\big).$$

• **Exercice 42.** Théorème de Casorati-Weierstrass.

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Soit $f$ une fonction holomorphe sur $D(a, r)\backslash\{a\}$ qui possède une singularité essentielle en $a$. Montrer que pour tout $0 < s \leq r$, $f\big(D(a, s)\backslash\{a\}\big)$ est dense dans $\mathbb{C}$.

• **Exercice 43.**

Calculer les intégrales

$$\int_{|z-1/2|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz, \qquad \int_{|z|=1} \frac{z + a}{z^n(z + b)} dz, \quad |b| > 1.$$

• **Exercice 44.** Soient $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$, on pose $S_{\theta_1,\theta_2} = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2\}$. Soit $f$ une fonction continue définie sur le secteur $S_{\theta_1,\theta_2}$ fermé, centré à l'origine. On note par $S_R$ l'arc de rayon $R$ inclus dans $S_{\theta_1,\theta_2}$. Montrer que

1. si $\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0$, alors $\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} f(z) dz = 0$.
2. si $\lim_{z \to 0} z f(z) = 0$, alors $\lim_{R \to 0} \int_{S_R} f(z) dz = 0$.
3. Si $\lambda > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$ et $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$, alors

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

• **Exercice 45.** Etudier la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2+\cos t}dt, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\sin t}.$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} \quad \text{pour tout } \alpha > 1,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{4+x^2}dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx.$$

• **Exercice 46.**

Montrer que les racines dans le disque $D(0,1)$ du polynôme $P(z) = z^{111} + 3z^{50} + 1$ sont simples et qu'il y en a exactement 50.

*Indication.* Considérer le polynôme $Q(z) = P(z) - 1$ et montrer que $|P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.