Université de Bordeaux **2018-2019**

TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé du 13/11/2018.

Documents non-autorisés, durée: 1h 20.

Par défaut, l'espace $\mathbb{R}^d$ est équipée de la norme euclidienne $||.||_2$. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une partie compacte de $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble. Donner la définition d'une application continue sur A.
3. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, et $f : K \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application continue. L'ensemble $f(K)$ est-il compact? L'application f est-elle uniformement continue sur K? (énoncer les résultats du cours correspondants)
4. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application continue et $K \subset \mathbb{R}^{d_1}$ un compact. Est-il vrai que $f^{-1}(K)$ est ouvert? fermé? compact? (une démonstration ou un contre-exemple le cas échéant)

Exercice 2.

1. Etudier l'existence de limites suivantes et les calculer le cas échéant:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4+y^4}{x^2-y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\log(e^x+e^{2y})}{x-y}.$$

2. Etudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par la relation suivante

$$g(x,y) = \frac{x^2y^3}{3x^4+2y^6}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $L_a = \{(x,y) : y = ax\}$. Montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),\ (x,y)\in L_a} g(x,y) = 0, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

n'existe pas.

Exercice 4. Rappelons que $\mathbb{R}^d = (\mathbb{R}^d, ||.||_2)$, où

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_i)_{i=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que pour toute norme $||.||'$ (pas nécessairement euclidienne) il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c||x||_2 \leqslant ||x||', \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Considérons $S = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x||_2 = 1\}$. L'ensemble S est-il compact?

   Dans la suite de cet exercice, on admet qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d : ||x||' \leqslant C||x||_2$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction définie par la relation

   $$f(x) = ||x||'.$$

   Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}^d$.

3. A l'aide de résultats du cours (précisez lesquels!) démontrez que

   $$\inf_{x\in S} f(x) = \min_{x\in S} f(x) = \min_{x\in S} ||x||' \overset{déf}{=} c > 0.$$

   En déduire que $c||x||_2 \leqslant ||x||'$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

FIN