Université de Bordeaux **2017-2018**
TMQ302U **Fonctions de plusieurs variables**

Devoir Surveillé du 24/10/2017.

Documents non-autorisés, durée: 1h 20.

Corrigé succinct

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1.

1. *Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé dans $\mathbb{R}^d$.*

   Cf. cours.

2. *Donner un exemple d'ouvert et un exemple de fermé dans $\mathbb{R}^d$. Donner un exemple d'ensemble qui n'est ni ouvert, ni fermé.*

   La boule ouverte (respectivement, fermée) unité
   $$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| < 1\}$$
   (respectivement, $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| \leqslant 1\}$) est un ouvert (respectivement, un fermé) de $\mathbb{R}^d$. Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle semi-fermé $A := [0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé (pour un exemple en dimension quelconque : c'est encore vrai du plongement $A \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^d$).

3. *Soit $A, B \subset \mathbb{R}^d$ deux ensembles. On pose*
   $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

   (a) *Soit A et B ouverts. Montrer que $A + B$ est ouvert.*

   Soit $c \in A + B$, qu'on peut par définition écrire $c = a + b$ avec $a \in A$ et B. Comme A et B sont ouverts il existe r_a et r_b dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que les boules ouvertes $B(a, r_a)$ et $B(b, r_b)$ soient contenues dans A et B respectivement. Si z est un élément $B(a+b, r_a+r_b)$, donc s'écrit sous la forme $z = (a + b) + s$ avec $\|s\| < r_a + r_b$, on a $z = (a + \frac{r_a}{r_a+r_b}s) + (b + \frac{r_b}{r_a+r_b}s)$, et $(a + \frac{r_a}{r_a+r_b}s)$ et $(b + \frac{r_b}{r_a+r_b}s)$ appartiennent à $B(a, r_a)$ et $B(b, r_b)$ respectivement. Donc $B(c, r_a+r_b) = B(a+b, r_a+r_b) \subset B(a, r_a)+B(b, r_b) \subset A+B$. On a bien montré que $A+B$ est ouvert. (On peut facilement vérifier que $B(a + b, r_a + r_b)$ est en fait *égal* à $B(a, r_a) + B(b, r_b)$).

(b) *Soit A fermé et B compact. L'ensemble $A+B$ est-il fermé ? Est-il compact ?*

Soit $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $A+B$, qu'on suppose converger vers une limite ℓ de $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que ℓ appartient à $A+B$. On peut écrire $(z^n) = (a^n + b^n)$ avec $(a^n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b^n) \in B^{\mathbb{N}}$. La compacité de B implique qu'on peut extraire de (b^n) une sous-suite $(b^{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite β dans B. La suite $a^{\varphi(n)} = z^{\varphi(n)} - b^{\varphi(n)}$ tend donc vers la limite $\ell - \beta =: \alpha$ et A étant fermé, cette limite en est un élément. Donc $\ell = \alpha + \beta$ appartient à $A+B$, qui est bien un fermé de $\mathbb{R}^d$.

Il n'est en revanche pas nécessairement compact, comme le montre le contre-exemple $A = \mathbb{R}^d$, $B = \{0\}$. (D'une manière générale, on peut verifier que, sous les hypothèses précédentes, $A+B$ est compact si et seulement si A est par surcroît lui-même borné (donc compact)).

Exercice 2.

1. *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble et $f : A \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application définie sur A.*

   (a) *Donner la définition de la continuité uniforme de f sur A.*

   Cf. cours.

   (b) *Soit $A = K$ un compact. Que peut-on dire de la continuité uniforme de f sur K?*

   Que si f est continue, elle est vraie (théorème de Heine, cf. cours).

2. Application : *soit $K = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, et*

$$f(x,y) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} : K \to \mathbb{R}_+$$

une fonction. Démontrez que f est uniformément continue sur K.

L'ensemble K est compact comme produit des compacts (car intervalles fermés bornés) $[0,1] \times [0,1]$ et f est clairement une fonction continue, donc elle est uniformément continue sur K d'après 1.(b) cidessus.

Exercice 3.

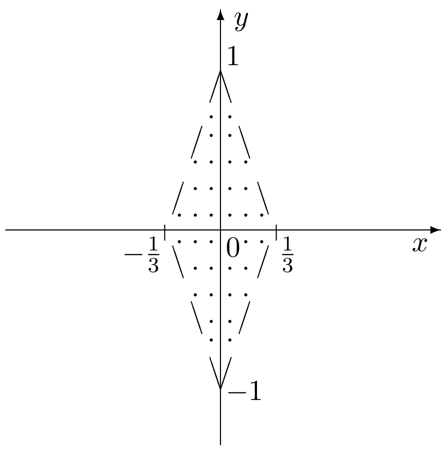
1. *L'application $(x,y) \mapsto |5x + 7y|$ définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$? Justifiez votre réponse.*

Cette application est nulle sur toute la droite d'équation $y = -\frac{5}{7}x$, donc ne satisfait pas l'axiome "de séparation" des normes : elle n'en est donc pas une. (Même si l'on pouvait par ailleurs vérifier facilement les deux autres axiomes).

2. *Démontrez que*
$$||(x,y)||' = 3|x| + |y|$$
est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessinez la boule $B'(0,1)$ (= la boule centrée au point (0,0) de rayon 1 par rapport à la norme $||.||'$)

L'application $\|\cdot\|'$ est clairement positive et, pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, on vérifie que : 1) si $\|(x,y)\| = 0$, alors $3|x| + |y| = 0$ donc $x = 0$ et $y = 0$; 2) si $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda(x,y)||' = ||(\lambda x, \lambda y)||' = 3|\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda|(|3x| + |y|) = |\lambda| \cdot ||(x,y)||'$ et 3) si (x', y') est un autre élément de $\mathbb{R}^2$, $||(x,y) + (x',y')||' = \|(x+x', y+y')\|' = 3|x+x'| + |y+y'| \leqslant 3(|x| + |x'|) + (|y| + |y'|) = ||(x,y)\|' + \|(x',y')\|'$. Donc $\|\cdot\|'$ est bien une norme.

La boule unité pour $\|\cdot\|'$ a pour frontière, dans le cadran $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, le segment de droite d'équation $3x + y = 1$ soit $y = 1 - 3x$. Les frontières sur les trois autres cadrans se déterminent de façon similaires, et l'on en déduit le dessin de la boule unité donné dans la figure ci-dessous.



Boule ouverte unité pour $\|\cdot\|'$.

3. *Trouver des constantes $C_1, C_2 > 0$ (pas nécessairement optimales) telles que*

$$||z|| \leqslant C_1||z||', \quad ||z||' \leqslant C_2||z||$$

pour tout $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $z := (x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} \|(x,y)\| &= \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \sqrt{2\max(|x|,|y|)^2} = \sqrt{2}\max(|x|,|y|) \\ &\leqslant \sqrt{2}(3|x|+|y|) = \sqrt{2}\|(x,y)\|'. \end{aligned}$$

D'autre part $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, même chose en y, d'où

$$\|(x,y)\|' = 3|x| + |y| \leqslant 3(|x|+|y|) \leqslant 6\|(x,y)\|.$$

Exercice 4. *Soit*

$$f(x,y) = \begin{cases} (4x^2-y^2)/(x^2+3y^2), & (x,y) \neq 0 \\ a, & (x,y) = 0 \end{cases}.$$

Indiquer la valeur $a \in \mathbb{R}$ tel que:

1. *f soit continue suivant la droite d'équation $x = 0$; f soit continue suivant la droite d'équation $y = 0$.*

   Pour $x = 0$ (et $y \neq 0$), $f(0, y) = -1/3$, donc f est continue suivant la droite $x = 0$ ssi $a = -1/3$. De même $f(x, 0) = 4$, donc f est continue selon l'axe des abscisses ssi $a = 4$.

2. *f soit continue au point (0,0) suivant la droite $y = bx, b \in \mathbb{R}$.*

   On a, si $x \neq 0$, $f(x, bx) = \frac{4-b^2}{1+3b^2}$, donc a doit prendre cette valeur pour que f soit continue en 0 suivant cette droite.

3. *Est-il possible de choisir la valeur a de sorte que l'application f soit continue au point (0,0) (en tant que fonction de deux variables) ?*

   Les questions précédentes montrent qu'aucune valeur de a ne satisfait à la fois les conditions contradictoires de continuité suivant les différentes droites d'approche de 0, donc f n'est pas prolongeable par continuité.

FIN