# Correction du DST de TMQ302 "Fonctions de plusieurs variables" du 09/01/2018.

**Exo. 1** 1) Soient $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^o \in O$, et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. On dit que $l \in \mathbb{R}^{d_1}$ est la limite de $f(x)$ lorsque $x \to x^o$ (Not. $l = \lim_{x \to x^o} f(x)$), si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x^o; \varepsilon) \ \forall x \in O : \|x - x^o\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon. \quad (1)$$

D'une manière équivalente

$$x \in B_{\mathbb{R}^d}(x^o, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_{\mathbb{R}^{d_1}}(l, \varepsilon).$$

2) a) Oui, si $l = \lim_{x \to x^o} f(x) \Rightarrow l = \lim_{t \to 0} f(x^o + t\bar{v})$.

En effet, considérons $x_t = x^o + t\bar{v}$. On a

$$\|x_t - x_o\| = \|(x^o + t\bar{v}) - x_o\| = \|t\bar{v}\| = |t| \cdot \|\bar{v}\| < \delta$$

(pour $|t| < \delta / \|\bar{v}\|$, car $\|\bar{v}\| \neq 0$). Alors, selon (1)

$$\|f(x^o + t\bar{v}) - l\| = \|f(x_t) - l\| < \varepsilon,$$

et ceci revient à dire que $l = \lim_{t \to 0} f(x^o + t\bar{v})$.

b) L'implication inverse est fausse. Voici un exemple simple (mais qui laisse à désirer):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0. \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Soit $\bar{v} = (v_1, v_2) \neq 0$

Alors, pour $x^o = 0$.

$$\lim_{t\to 0} f(x^0+t\bar{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2 t^2}{v_1^2 t^2 + v_2^2 t^2} = \frac{v_1 v_2}{v_1^2+v_2^2} ;$$

on constate que $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^{2*}$ fixé la lim. existe et dépend de $\bar{v}$. La $\lim_{x\to x^0} f(x)$ n'existe pas (car, pour que ça soit vrai, il est nécessaire que la $\lim_{t\to 0} f(x^0+t\bar{v})$ ne dépend pas de $\bar{v}$, ce qui n'est pas le cas).

On cherche donc un exemple pour lequel $\lim_{t\to 0} f(x^0+t\bar{v})$ existe et ne dépend pas de $\bar{v}$, et $\lim_{x\to x^0} f(x)$ n'existe pas. Le voici :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq 0. \\ 0, & (x,y)=0. \end{cases}$$

Pour $\forall v=(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^{2*}$ ; $x^0=0$

$$\lim_{t\to 0} f(x^0+t\bar{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2^2 t^3}{v_1^2 t^2 + v_2^4 t^4} = 0,$$

cette lim. ne dépend pas de $\bar{v}$. Or, si on pose $x=ay^2$, $a\in\mathbb{R}$, on obtient :

$$\lim_{y\to 0} f(a^2y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{ay^4}{a^2y^4+y^4} = \frac{a}{a^2+1},$$

qui dépend de $a\in\mathbb{R}$, et la $\lim_{x\to x^0} f(x)$ n'existe donc pas.

---

Exo 2 :

1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10x^5+5y^4}{x^2+y^2} = 0, \text{ car}$$

Pour $(x,y) \to 0$

$$0 \leq \left| \frac{10x^5 + 5y^4}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{10|x|^5 + 5|y|^4}{x^2+y^2} \leq \frac{10r^5 + 5r^4}{r^2} =$$

$|x| \leq \|(x,y)\|$
$|y| \leq \|(x,y)\|$
$\|(x,y)\| = r.$

$$= 10r^3 + 5r^2 \longrightarrow 0 \quad (r \to 0).$$

2) Par la continuité de fonctions $f(x,y) = \log(3x+2y)$, $g(x,y) = e^{2x-y}$ $(g(x_0,y_0) \neq 0,\ (x_0,y_0) = (1,2))$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\log(3x+2y)}{\exp(2x-y)} = \frac{\log(3+4)}{\exp(2-2)} = \frac{\log 7}{e^0} = \log 7.$$

3). Cette limite n'existe pas, car pour $x = ay$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -2$ on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=ay}} \frac{5x^4 + 4y^3}{x^2 + 4xy + 4y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{5a^4y^4 + 4y^3}{a^2y^2 + 4ay^2 + 4y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y(5a^4y + 4)}{a^2 + 4a + 4} = 0.$$

Or, pour $a = -2$, le dénominateur $= 0$, et la limite n'existe pas. Idem pour la limite de 2 variables.

4) On raisonne comme pour la limite 1) en faisant l'attention à l'effet observé dans la limite 3).

On a.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4 + 5y^3}{x^2 + 4xy + 6y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4 + 5y^3}{(x+2y)^2 + 2y^2}.$$

On pose $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ et

$$(x+2y)^2+2y^2=r\underbrace{(\cos\varphi+2\sin\varphi)^2}_{\geq 0}+2r^2\geq 2r^2.$$

Par conséquent

$$0\leq\left|\frac{3x^4+5y^3}{(x+2y)^2+2y^2}\right|\underset{\substack{|x|\leq r,\ \|(x,y)\|=r.\\ |y|\leq r,}}{\leq}\frac{3r^4+5r^3}{2r^2}=\left(\frac{3}{2}r^2+\frac{5}{2}r\right)\to 0\quad (r\to 0).$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^4+5y^3}{x^2+4xy+6y^2}=0.$

---

Exo. 3 On a $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\sin(x-y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=0.\end{cases}$

1) Il vient de théorèmes du cours (le quotient des fonctions continues avec le dénominateur $\neq 0$) que $F(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^{2*}$ ($F\in C(\mathbb{R}^{2*})$, $\mathbb{R}^{2*}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$).

Il reste d'étudier la continuité au pt. $x^0=(0,0)$, et pour cela on procède comme ds l'Exo. 2. Montrons que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\sin(x-y)}{x^2+y^2}=0.$$

On a $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ et

$$0\leq\left|\frac{xy\sin(x-y)}{x^2+y^2}\right|=\frac{r^2|\cos\varphi\sin\varphi|\cdot|\sin(r\cos\varphi-r\sin\varphi)|}{r^2}\underset{|\sin w|\leq|w|}{\leq}$$

$$\leq\frac{r^3\overbrace{|\cos\varphi\sin\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi)|}^{\leq C}}{r^2}\leq Cr\to 0\quad (r\to 0).$$

(Rq dire que $|\sin(x-y)| \leq 1$ ne permet pas de conclure !)

Donc $F \in C((0,0))$ et $F \in C(\mathbb{R}^2)$

2). D'abord, on calcule les dérivées partielles pour $(x,y) \in \mathbb{R}^{2*}$ (selon les théorèmes du cours):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\,\frac{(\sin(x-y) + x\cos(x-y))(x^2+y^2) - 2x^2\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= y\,\frac{\sin(x-y)(y^2-x^2) + x(x^2+y^2)\cos(x-y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\,\frac{(\sin(x-y) - y\cos(x-y))(x^2+y^2) - 2y^2\sin(x-y)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= x\,\frac{\sin(x-y)(x^2-y^2) - y^2(x^2+y^2)\cos(x-y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calculons les dérivées partielles au pt $(x_0,y_0) = (0,0)$ par la définition:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{0}{x} - 0}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{F(0,y) - F(0,0)}{y} = 0.$$

3) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^{d_1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - un ouvert. Alors $f \in C^1(\Omega)$ ssi les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, ..d$. existent et sont continues sur $\Omega$ $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(\Omega)\right)$.

4) Vérifions ce critère pour la fonction $F$. D'après les résultats du cours, il est clair que

$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^{2*})$, donc $F \in C^1(\mathbb{R}^{2*})$.

Il reste l'étude au pt. $(x_0, y_0) = (0,0)$. Notamment, vérifions si

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}_{(4.1)} ; \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}_{(4.2)}.$$

Considérons (4.1), c'est pareil pour (4.2). Posons $x = y$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \underset{x=y}{\uparrow}= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{4x^4} = \infty.$$

Idem pour (4.2). Donc les relations (4.1), (4.2) ne sont pas satisfaites, et $F \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

---

5) Pour la différentiabilité de $F$ au pt $(x_0, y_0) = (0,0)$, on doit vérifier que $(x^0 = (0,0),\ h = (h_1, h_2))$:

$$F(x^0 + h) = F(x^0) + \underbrace{DF(x^0)}_{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x^0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x^0)\right)} \cdot h + R_1(h),$$

où $\lim_{h\to 0} \frac{R_1(h)}{\|h\|} = 0$. Ceci s'écrit comme

$$F(h_1, h_2) = F(0,0) + \underbrace{DF(0,0)}_{=0} \cdot h + R_1(h) \text{ et,}$$

par identification.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} R_1(h) = \lim_{h\to 0} \frac{h_1 h_2 \sin(h_1 - h_2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

Procédant comme avant (posez $h_1 = a h_2$, $a \in \mathbb{R}$), nous constatons que cette limite n'existe pas.

Donc $F \notin \mathcal{D}((0,0))$ (n'est pas différentiable au pt. $(0,0)$.).

---

Exo. 4. 1) $f : O \to \mathbb{R}$. Supposons que $f \in C^2(O)$.
Alors :

$$f(x^0+h) = f(x^0) + \mathcal{D}f(x^0)\cdot h + \frac{1}{2}\left(\mathcal{D}f(x^0)h, h\right) + R_2(x^0;h) =$$

$$= f(x^0) + \mathcal{D}f(x^0)\cdot h + \frac{1}{2} h^t \mathcal{D}f(x^0)\cdot h + R_2(x^0;h),$$

où $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|^2} R_2(x^0;h) = 0$, cf. la question 2) pour la formule intégrale de $R_2(x^0;h)$.

2) Le reste $R_2(x^0;h)$ sous une forme intégrale :

$$\boxed{R_2(x^0;h) = h^t \int_0^1 (1-s)\left(\mathcal{D}^2 f(x^0+sh) - \mathcal{D}^2 f(x^0)\right) ds \cdot h.}$$

3). Faisons les calculs selon la question 1) :

3.1) $F(x,y) = \sin(x,y) + \cos(xy)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\left(\cos(xy) - \sin(xy)\right), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x\left(\cos(xy) - \sin(xy)\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -y^2\left(\sin(xy) + \cos(xy)\right), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -x^2\left(\sin(xy) + \cos(xy)\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \cos(xy)(1-x) - \sin(xy)(1+x).$$

On y substitue maintenant $(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, et on obtient

$$F(x^0+h) = \frac{2}{\sqrt{2}} + [0, 0]\cdot\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[h_1, h_2]\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} & -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$+ R_2(x^0,h) =$$

$$\ominus \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}[h_1,h_2]\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}+R_2$$

Pour la matrice Hessienne $H_F$, on a $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$.
et donc $x^0=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ est le point de max. local.

3.2) Idem:

$$G(x,y)=\frac{1}{(3x^2+3y^2+2xy+2x+6y+4)}, \quad x^1=(0,-1), \; x^2=(-1,0).$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=-\frac{6x+2y+2}{(3x^2+3y^2+2xy+2x+6y+4)^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=-\frac{6y+2x+6}{(\;--(*)\;)^2}$$

(ici, pour la simplicité d'écriture, $(*)=$
$=(3x^2+3y^2+2xy+2x+6y+4)$.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=-\frac{6(*)^2-(6x+2y+2)^2\cdot 2(*)}{(*)^4};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}=-\frac{6(*)^2-(6y+2x+6)^2\cdot 2(*)}{(*)^4}.$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 G}{\partial y\partial x}=-\frac{2(*)^2-(6x+2y+2)\cdot 2(*)^2(6y+2x+6)}{(*)^4}$$

Pour $x^1=(0,-1)$

$G(0,-1)=1$; $\left[\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y}\right]=[0,0]$.

$$H_G=\frac{2}{49}\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{bmatrix} \text{ et.}$$

$$G(x^1+h)=1+[0,0]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}+\frac{1}{49}[h_1,h_2]\begin{bmatrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}+R_2(x^1;h).$$

Pour la matrice Hessienne

$H_G = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ on a $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, donc.

$X^1 = (0,-1)$ est le pt. de max. local.

Idem pour $x^2 = (-1,0)$.

$G(-1,0) = \frac{1}{5}$ ; $DG = \left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}\right] = \left[\frac{4}{25}, -\frac{4}{25}\right]$.

$H_G = \frac{1}{5^4}\begin{bmatrix} 10 & -210 \\ -210 & 10 \end{bmatrix}$.

$G(x^2+h) = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}[4,-4]\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^4}[h_1, h_2] \cdot$

$\cdot \begin{bmatrix} 10 & -210 \\ -210 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + R_2(x^2, h)$

Le point $x^2 = (-1,0)$ n'est pas un pt. extrémal, car $DG(x^2) \neq 0$.

---

Exo. 5 1). Si $x^0 \in O$ un point extémal, alors nécessairement $Df(x^0) = 0$. Les conditions suffisantes sont suivantes:

1.a). $Df(x^0) = 0$ et $D^2 f(x^0)$ (= la matrice Hessienne au pt. $x^0$) $> 0$ $\Rightarrow$ $x^0$ est le pt. de min. local.

1.b) $Df(x^0) = 0$ et $D^2 f(x^0) < 0$ $\Rightarrow$ $x^0$ est le pt. de max. local.

1.c). $Df(x^0) = 0$, et $D^2 f(x^0)$ admet des valeurs propres (strictement) positives et négatives $\Rightarrow$ $x^0$ est le pt. col (ou bien le pt. de selle).

2) Etude d'extréma des fonctions données:

2.1) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

$$\mathcal{D}f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = \left[4x^3 - 4x,\ 4y^3\right] = 0.$$

$\rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Les solutions:

$M_1\,(0,0),\ M_2\,(1,0),\ M_3\,(-1,0)$.

$$\mathcal{D}^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}.$$

Pour $M_1$: $\mathcal{D}^2 f = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on ne peut pas conclure

(or $f(x,y) \simeq y^4 - 2x^2 + \bar{o}(x^2)$ et donc $M_1$ est le pt. col).

$M_2$: $\mathcal{D}^2 f = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on ne peut pas conclure

(or $f(x,y) = (x^4 - 2x^2 + 1) + y^4 - 1 = (x^2-1)^2 + y^4 - 1$.

$\Rightarrow M_2$ est le min. local)

$M_3$: $\mathcal{D}^2 f = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ idem (la même étude montre que ceci est min. local)

---

2.2) $g(x,y) = (\sin x)\cdot(\sin y)\cdot(\sin(x+y))$,

$(x,y) \in \left]0,\pi\right[ \times \left]0,\pi\right[$.

On a

$$\mathcal{D}g = \left[\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right] = \Big[\sin y\,\{\cos x \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \cos(x+y)\},$$

$$\sin x\,\{\cos y \cdot \sin(x+y) + \sin y \cdot \cos(x+y)\}\Big] =$$

$$= \left[ \sin y \cdot \sin(2x+y),\ \sin x \cdot \sin(x+2y) \right] = 0$$

On a les équations:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=\pi \\ x+2y=\pi \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+y=\pi \\ x+2y=\pi \end{cases}$$

$x, y > 0$ — pas de sol. pas de sol. pas de sol. $\downarrow$ $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

La matrice Hessienne:

$$D^2 g = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin y \cdot \cos(2x+y) & \sin(2x+2y) \\ \sin(2x+2y) & 2\sin x \cos(x+2y) \end{bmatrix}$$

$$D^2 g\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} < 0 \Rightarrow$$ le pt. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ est le pt. de max. local.

---

2.3) $h(x,y) = (8x^2 - 6xy + 3y^2) e^{2x+3y}$

On a:

$$D h = \left[ \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right] = e^{2x+3y} \Big[ 2(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y),$$

$$3(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y) \Big] = 0$$

Le système est

$$\begin{cases} 8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y = 0 \\ 8x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x - 5y = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Les solutions $M_1(0,0)$; $M_2\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

Pour la matrice Hessienne, on obtient.

$$D^2h = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)+2e^{2x+3y}(16x-6y+8);$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 9e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)+3e^{2x+3y}(-6x+6y+2)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)+2e^{2x+3y}(-6x+6y-3)$$

Pour $M_1$:

$$D^2h(0,0) = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -6 & 16 \end{bmatrix} > 0,$$ $M_1$ est le pt. de min. local.

Pour $M_2$:

$$D^2h\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) = e^{-2}\begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -9 & \frac{21}{2} \end{bmatrix}$$ – $M_2$ est le pt. colle.

---

## Exo. 6

1) Du fait que $u, v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, on a les dérivées partielles mixtes qui ne dépendent de l'ordre de la dérivation, i.e. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ (6.1)

Or $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ (en appliquant $\frac{\partial}{\partial x}$),

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ (en appliquant $\frac{\partial}{\partial y}$), (6.2)

et, pareillement, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. (6.3)

En prenant la somme de (6.1) et (6.3), on a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0,$$

idem pour $V$ (prenez la somme de (6.2) et (6.3)).

2) Supposons que $u, v$ satisfont les équations (1). On vérifie facilement qu'il est de même pour $U, V$; en effet

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \overset{(*)}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \overset{(*)}{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \overset{(*)}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \overset{(*)}{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}$$

(il suffit de calculer les dérivées partielles données par (*) et utiliser les éq. (1) pour $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$).

Notons en particulier, la q. 1) implique que

$$\Delta U = \Delta V = 0.$$

3) Soit $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y)$.

On a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x(\cos y) = e^x((x+1)\cos y - y\sin y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) = -e^x((x+1)\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(x\sin y + y\cos y) + e^x \cdot \sin y = e^x((x+1)\sin y + y\cos y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y) = e^x(\cos y(x+1) - y\sin y),$$

d'où les relations (1) voulues. En particulier (par la q. 1)), on a $\Delta u = \Delta v = 0$. Donc les fonctions correspondantes $U, V$ satisferont l'éq. (1) également.

— Fin —.