Université de Bordeaux **2018-2019**
TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé Terminal du 8/01/2019.

Documents non-autorisés, durée: 3h.

Par défaut, l'espace $\mathbb{R}^d$ est équipée de la norme euclidienne $||.||_2$. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application et $x^0 \in O$.

1. Donner la définition de la différentielle de l'application f au point x^0. Donner la définition de la différentiablité de f sur O.
2. La différentiabilité de f au point x^0 implique-t-elle la continuité de f en ce point (démonstration ou contre-exemple)? La continuité de f au point x^0 implique-t-elle la différentiabilité en ce point (idem)?
3. Définir les dérivées partielles de f au point x^0 et la classe d'applications $C^1(O)$. Donner le critère d'appartenance de l'application f à cette classe en termes de ses dérivées partielles (la démonstration n'est pas demandée).

Exercice 2. Soient $x = (x_j)_{j=1,\dots,d},\ y = (y_j)_{j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d$ des vecteurs. Rappelons que le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ est défini de la manière suivante:

$$(x, y) \quad = \quad \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \right) = y^t \cdot x = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j.$$

Ci-dessus $(.)^t$ note la transposée d'un vecteur (ou d'une matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $d \times d$, et

$$f(x) = (Ax, x) = x^t\, A\, x = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} a_{jk} x_j x_k, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

1. En utilisant la définition, étudier la différentiabilité de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^d$ et calculer sa différentielle.
2. Obtenir le même résultat en utilisant les dérivées partielles (cf. l'Exercice 1, q. 3).

Exercice 3. Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3+3y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. Calculer les dérivées partielles de f sur: a) $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$; b) au point $(x,y) = (0,0)$.

3. L'application f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

4.* Etudier la différentiabilité de l'application f au point $(x,y) = (0,0)$.

Exercice 4. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$, et $F : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur O.

1. Donner la formule de Taylor d'ordre 2 pour la fonction f au point x^0. Préciser la formule intégrale pour le reste.

2. Donner les formules de Taylor d'ordre 2 pour la fonction suivante au points indiqués (la formule pour le reste n'est pas demandée):

$$h(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy), \quad (x_1,y_1) = (0,0), (x_2,y_2) = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2).$$

Exercice 5. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$ et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.

1. Enoncer la condition nécessaire pour que le point x^0 soit un extremum local.

2. Enoncer les conditions suffisantes pour que: a) x^0 soit un point de minimum local; b) x^0 soit un point de maximum local; c) x^0 soit un point-selle.

3. Calculer les points critiques de fonctions suivantes et étudier leur nature:

   (a) $g(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$,

   (b) $h(x,y) = (x^2 - 3y^2)\, e^{x-y}$.

Exercice 6. Soit $O =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un demi-espace ouvert. Démontrer que la fonction

$$u(t,x) = u(t; x_1, x_2, \ldots, x_d) \quad = \quad \frac{1}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{4a^2 t} \sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right), \qquad t \in]0, +\infty[, \ x \in \mathbb{R}^d,$$

satisfait l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

FIN