Université de Bordeaux **2018-2019**
TMQ302U Fonctions de plusieurs variables

Corrigé du Devoir Surveillé Terminal du 8/01/2019.

Documents non-autorisés, durée: 3h.

Par défaut, l'espace $\mathbb{R}^d$ est équipée de la norme euclidienne $||.||_2$. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application et $x^0 \in O$.*

1. *Donner la définition de la différentielle de l'application f au point x^0. Donner la définition de la différentiablité de f sur O.*

   Cf. cours.

2. *La différentiabilité de f au point x^0 implique-t-elle la continuité de f en ce point (démonstration ou contre-exemple)? La continuité de f au point x^0 implique-t-elle la différentiabilité en ce point (idem)?*

   Cf. cours. Pour donner un contre-exemple à propos de la seconde question, il suffit de considérer le cas $d = 1 = d_1$ (fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) où la fonction $x \mapsto |x|$ est en 0 continue non dérivable (= différentiable ici). (Pour un contre-exemple en plusieurs variables on peut citer aussi la fonction de l'exercice 3. ci-dessous).

3. *Définir les dérivées partielles de f au point x^0 et la classe d'applications $C^1(O)$. Donner le critère d'appartenance de l'application f à cette classe en termes de ses dérivées partielles (la démonstration n'est pas demandée).*

   Cf. cours.

Exercice 2. *Soient $x = (x_j)_{j=1,\dots,d}$, $y = (y_j)_{j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^d$ des vecteurs. Rappelons que le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ est défini de la manière suivante:*

$$(x, y) \quad = \quad \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{bmatrix} \right) = y^t \cdot x = \sum_{j=1}^{d} x_j y_j.$$

Ci-dessus $(.)^t$ note la transposée d'un vecteur (ou d'une matrice). Soit $A \in \mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $d \times d$, et

$$f(x) = (Ax, x) = x^t \, A \, x = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} a_{jk} x_j x_k, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

1. *En utilisant la définition, étudier la différentiabilité de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^d$ et calculer sa différentielle.*

   On calcule, pour x et $\underline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f(x+\underline{\varepsilon}) &= (A(x+\underline{\varepsilon}),(x+\underline{\varepsilon})) = (x+\underline{\varepsilon})^t\, A\,(x+\underline{\varepsilon}) \\ &= f(x) + \left(x^t\, A\,\underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^t\, A\, x\right) + f(\underline{\varepsilon}). \end{aligned}$$

   On remarque alors que la fonction $L_x(\underline{\varepsilon}) = x^t\, A\,\underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^t\, A\, x$ est clairement linéaire en $\underline{\varepsilon}$, et que $o(\underline{\varepsilon}) := f(\underline{\varepsilon})$ vérifie :

$$\frac{o(\underline{\varepsilon})}{\|\underline{\varepsilon}\|} = (\frac{\underline{\varepsilon}}{\sqrt{\|\underline{\varepsilon}\|}})^t\, A\, \frac{\underline{\varepsilon}}{\sqrt{\|\underline{\varepsilon}\|}}$$

   tend vers 0 quand $\underline{\varepsilon}$ tend vers 0. Ainsi f est-elle différentiable en x, de différentielle $Df(x) = L_x$.

2. *Obtenir le même résultat en utilisant les dérivées partielles (cf. l'Exercice 1, q. 3).*

   L'expression explicite de f montre qu'elle est, comme polynôme en les variables x_i, de classe C^∞ donc C^1 sur $\mathbb{R}^d$. On en déduit qu'elle est différentiable, et que la matrice de sa différentielle dans la base canonique est la matrice jacobienne de f. Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} a_{jk}x_jx_k\right) = \sum_{k=1}^{d} a_{ik}x_k + \sum_{j=1}^{d} a_{ji}x_j$$

   on retrouve le résultat de la question précédente.

Exercice 3. *Soit*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3+3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Montrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.*

   La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ comme fraction rationnelle à dénominateur non nul. Passant en coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ on écrit :

$$|f(x,y)| = \left|\frac{2r^3\cos^3\theta + 3r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| = r\left|(2\cos^3\theta + 3\sin^3\theta)\right| \leqslant 5r$$

   ce qui montre que f tend vers 0 en 0. Elle est donc continue en 0 et finalement sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. *Calculer les dérivées partielles de f sur: a) $\mathbb{R}^{2*} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; b) au point $(x,y) = (0,0)$.*

En $(x,y) \neq (0,0)$ on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^4 + 6x^2y^2 - 6xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{9x^2y^2 - 4x^3y + 3y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

En $(0,0)$, $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{2x^3}{x^3} \to_{x\to 0} 2$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$, et on calcule de même que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$.

3. *L'application f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?*

   On constate que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$ ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ quand y tend vers 0. Donc f n'est pas de classe C^1 en $(0,0)$.

4.* *Etudier la différentiabilité de l'application f au point $(x,y) = (0,0)$.*

   Si f est différentiable en $(0,0)$, alors d'après la question 2. sa matrice jacobienne est (2,3). En passant à nouveau en écriture polaire on a

$$\frac{f(x,y) - 2x - 3y}{\|(x,y)\|} = -(2\cos\theta\sin^2\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta)$$

   qui n'est clairement pas de limite nulle en $r \to 0$ (fixer par exemple $\theta = \pi/4$). Cette contradiction montre que $f(x,y)$ n'est pas différentiable en 0.

Exercice 4. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$, et $F : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur O.*

1. *Donner la formule de Taylor d'ordre 2 pour la fonction f au point x^0. Préciser la formule intégrale pour le reste.*

   Cf. cours.

2. *Donner les formules de Taylor d'ordre 2 pour la fonction suivante au points indiqués:*

$$h(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy), \quad (x_1,y_1) = (0,0), (x_2,y_2) = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2).$$

   Ici

$$Dh(x,y) = (y\cos(xy) - y\sin(xy), x\cos(xy) - x\sin(xy))$$

   puis

$$D^2h = \begin{pmatrix} -y^2(\cos(xy) + \sin(xy)) & (1-xy)\cos(xy) - (1+xy)\sin(xy) \\ (1-xy)\cos(xy) - (1+xy)\sin(xy) & -x^2(\cos(xy) + \sin(xy)) \end{pmatrix}$$

   d'où en $(0,0)$:

$$h(x,y) \quad = \quad 1 + xy + o(\|(x,y)\|^2)$$

   pour une fonction $o(\|(x,y)\|^2)$ vérifiant $\frac{o(\|(x,y)\|^2)}{\|(x,y)\|^2} \to 0$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

Finalement, en $(\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$,

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \sqrt{2} \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\left((x-\sqrt{\pi}/2)^2 - 2(x-\sqrt{\pi}/2)(y-\sqrt{\pi}/2) + (y-\sqrt{\pi}/2)^2\right) \\ &\quad +o(\|(x,y)-(\sqrt{\pi}/2,\sqrt{\pi}/2)\|^2) \end{aligned}$$

soit encore

$$h(x,y) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}\pi}{8}(x+y-\sqrt{\pi})^2 + o(\|(x,y)-(\sqrt{\pi}/2,\sqrt{\pi}/2)\|^2)$$

pour une fonction $o(\|(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, y-\frac{\sqrt{\pi}}{2})\|^2)$ telle que, quand (x,y) tend vers $(\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$, on ait $\frac{o(\|(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2},y-\frac{\sqrt{\pi}}{2})\|^2)}{\|(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2},y-\frac{\sqrt{\pi}}{2})\|^2} \to 0$.

Exercice 5. *Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$ et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.*

1. *Enoncer la condition nécessaire pour que le point x^0 soit un extremum local.*

   Cf. cours.

2. *Enoncer les conditions suffisantes pour que: a) x^0 soit un point de minimum local; b) x^0 soit un point de maximum local; c) x^0 soit un point-selle.*

   Cf. cours.

3. *Calculer les points critiques de fonctions suivantes et étudier leur nature:*

   (a) $g(x,y,z) = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

   On calcule que $Dg(x,y,z) = (9x^2+6y, 2y+6x, 2z-2)$, d'où l'on tire que les points critiques sont $(0,0,1)$ et $(2,-6,1)$. La hessienne de g est

   $$D^2g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 18x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   qui vaut $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $(0,0,1)$, et $\begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $(2,-6,1)$.
   L'examen des mineurs montre ainsi que :

   - en $(0,0,1)$, la hessienne est de signature $(2,1)$, et on a un point-selle ;
   - en $(2,-6,1)$ la hessienne est de signature $(3,0)$: le point est un minimum local.

(b) $h(x,y) = (x^2 - 3y^2)\, e^{x-y}$.

On calcule $Dh(x,y) = (2x + x^2 - 3y^2, -6y - x^2 + 3y^2)e^{x-y}$. Les points critiques vérifient donc $x - 3y = 0$ (sommer les équations des deux premières coordonnées) et $2x + x^2 - 3y^2 = 0$, soit $x = 3y$ et $y(y+1) = 0$. D'où les deux points critiques : $(0,0)$ et $(-3,-1)$. La hessienne de h est

$$D^2h(x,y) = e^{x-y} \begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 + 4x + 2 & -x^2 + 3y^2 - 2x - 6y \\ -x^2 + 3y^2 - 2x - 6y & x^2 - 3y^2 + 12y - 6 \end{pmatrix}$$

soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ en $(0,0)$ et $e^{-2} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$ en $(-3,-1)$.

Ainsi,

- en $(0,0)$, la hessienne est de signature $(1,1)$: on a un point-selle ;
- en $(-3,-1)$, la hessienne est de signature $(0,2)$: le point est un maximum local.

Exercice 6. *Soit $O =]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ un demi-espace ouvert. Démontrer que la fonction*

$$u(t,x) = u(t;x_1,x_2,\ldots,x_d) \quad = \quad \frac{1}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{4a^2t}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right), \qquad t \in]0,+\infty[,\ x \in \mathbb{R}^d,$$

satisfait l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t;x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^{d/2}} \exp\left(-\frac{1}{4a^2t}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{-d}{2t^{1+d/2}} + \frac{1}{4a^2t^{2+d/2}}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2t}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right) \\
&= \frac{1}{t^{1+d/2}}\left(-\frac{d}{2} + \frac{\sum_j x_j^2}{4a^2t}\right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2t}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right),
\end{aligned}$$

et d'autre part, pour j dans $\{1,\ldots,d\}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t;x) \quad = \quad \frac{1}{t^{d/2}}\left(\frac{-x_j}{2a^2t}\right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2t}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t;x) \quad = \quad \left(-1 + \frac{x_j^2}{2a^2t}\right) \frac{1}{2a^2t^{1+d/2}} \exp\left(-\frac{1}{4a^2t}\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)$$

donc

$$a^2 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t;x) = \frac{1}{t^{1+d/2}} \left(-\frac{d}{2} + \frac{\sum_j x_j^2}{4a^2 t} \right) \exp\left(-\frac{1}{4a^2 t} \sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right) = \frac{\partial u}{\partial t}(t;x).$$

FIN