Université de Bordeaux **TMQ302 : Fonctions de plusieurs variables**

Feuille d'exercices N. 1 : Topologie sur $\mathbb{R}^d$

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

Exercice 1. Soient A, B, C des ensembles, $A, B, C \subset X$. Rappelons que $A^c = X \backslash A$. Démontrer que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Que peut-on dire de $(\cup_{i \in I} A_i)^c$ et $(\cap_{i \in I} A_i)^c$?

Exercice 2. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ l'un des ensembles suivants
- $B((1,0),2)$, $B(0,2)\backslash B(0,1)$, $\{(x,y) : x \in [0,2], y \in]-1,1[\} = [0,2] \times]-1,1[$,
- $\{(1/n, 1/m) : n, m \in \mathbb{N}^*\} = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*} \times (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\{(1/n, y) : n \in \mathbb{N}^*, y \in [0,1]\} = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*} \times [0,1]$,
- $\{(p,q) : p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\} = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0,1])$.

Dessinez-le. L'ensemble A est-il ouvert ? fermé ? Donnez $\bar{A}, A^\circ$ et $Fr(A)$.

Exercice 3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? (Démonstration ou contre-exemple selon les cas.)

1. Toute partie non ouverte de $\mathbb{R}^d$ est fermée.
2. Une union quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ est ouverte.
3. Une intérsection quelconque de fermés de $\mathbb{R}^d$ est fermé.
4. Une union quelconque de fermés de $\mathbb{R}^d$ est fermée.
5. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^4 < 1\}$ est ouvert ? fermé ? borné ?
6. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y^2 \leqslant 1\}$ est ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 4.

1. Montrer que toute boule ouverte (fermée) est un ouvert (fermé).
2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\bar{B}(a,r)$ et que $B(a,r) = \left(\bar{B}(a,r)\right)^\circ$.

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$.

1. Montrer que $x \in A^\circ$, l'intérieur de A, si et seulement si (**abréviation :** *"si et seulement si" = "ssi"*) il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Par conséquent, A est ouvert ssi $A = A^\circ$.

2. Montrer que $x \in \bar{A}$, l'adhérence de A, ssi pour tout $r > 0$ on a $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. D'où A est fermé ssi $\bar{A} = A$.
3. Démontrer que $x \in \bar{A}$ ssi il existe une suite $(x^n) \subset A$ telle que $x^n \to x$.
4. Montrer que $a \in Fr(A)$ ssi pour tout $r > 0$ on a $B(a,r) \cap A \neq \emptyset$ et $B(a,r) \cap A^c \neq \emptyset$.

Exercice 6. (Trois normes classiques sur $\mathbb{R}^d$)
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On définit pour $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ les trois nombres suivants :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|.$$

1. Prouver que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^d$. Dessiner les boules unités associées à ces trois normes dans $\mathbb{R}^2$.
2. Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{d}\,\|x\|_2 \leqslant d\,\|x\|_\infty.$$

Exercice 7. (Les normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^d$)
Soit p un réel > 1. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, et que ses valeurs sont des fonctions décroissantes de p.

1. Montrer que

$$\forall s \in [0, +\infty[, \ \forall t \in [0, +\infty[, \qquad st \leqslant \frac{1}{p} s^p + \frac{1}{q} t^q$$

où q est défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (On pourra fixer t et étudier la fonction $s \mapsto st - \frac{1}{p}s^p - \frac{1}{q}t^q$.)
2. Soient $x = (x_1, ..., x_d)$ et $y = (y_1, ..., y_d)$. On note $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_q$. Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., d\}$ on a

$$\frac{|x_i y_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|x_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q\beta^q}$$

et en déduire l'*inégalité de Hölder* :

$$\Big| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \Big| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

3. En écrivant que $|x_i + y_i|^p \leqslant |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$, montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire.
4. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.
5. Montrer que si $r > p > 1$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$: $\|x\|_r \leqslant \|x\|_p$ et que l'inégalité est stricte si x a au moins deux composantes non nulles. (On pourra se ramener au cas où $\|x\|_p = 1$ et utiliser le fait qu'alors $|x_i| \leqslant 1$ pour tout i.)

Exercice 8. **(Normes sur des fonctions)**
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

1. Vérifier que $\|f\|_\infty$ et $\|f\|_1$ sont des réels bien définis pour tout $f \in E$.
2. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont des normes sur E.
3. Montrer que : $\forall f \in E$, $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.
4. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 9. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? (Démonstration ou contre-exemple selon les cas.)

1. Toute suite divergente dans $\mathbb{R}^d$ est une somme de deux suites divergentes.
2. Toute suite convergente dans $\mathbb{R}^d$ est une somme de deux suites divergentes.
3. Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent, alors (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 10. **(Topologie de $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, l'espace produit)**
Soient $X = \mathbb{R}^{d_1}, Y = \mathbb{R}^{d_2}$ et $||.||_1, ||.||_2$ les normes (euclidiennes) correspondantes.

1. Expliquez pourquoi $X \times Y$ est un espace vectoriel. Explicitez les opérations de l'espace (la somme de deux vecteurs, un vecteur fois scalaire).
2. Pour $z = (x, y) \in X \times Y$, on considère
$$||z|| = ||(x, y)|| = \max\{||x||_1, ||y||_2\},$$
montrer que $||.||$ ainsi définie est une norme.
3. Supposons $A \subset X$ et $B \subset Y$. Démontrer que $A \times B$ est un ouvert (fermé) si et seulement si A, B sont ouverts (fermés).

4. * Reprendre les questions 2, 3, pour

$$||z|| = ||(x,y)|| = ||x||_1 + ||y||_2.$$

Exercice 11.

1. Les ensembles suivants sont-ils compacts

$$\begin{aligned}&\bar{B}(a,r), \quad B(a,r),\\ &\Pi_1 = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : x \in [a,b], y \in [c,d]\},\\ &\Pi_2 = [a,b] \times]c,d[= \{(x,y) : x \in [a,b], y \in]c,d[\}?\end{aligned}$$

2. Soit (x^n) une suite convergente dans $\mathbb{R}^d$, de limite x. Soit $A = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $A \cup \{x\}$ est compact.