

Compléments : différentiabilité, dérivées partielles, etc.

Par défaut, l'espace en question est  $\mathbb{R}^d$  muni de la norme euclidienne.

**Exercice 1.** Etudier la différentiabilité de fonctions suivantes et trouver la différentielle lorsqu'elle existe.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y, & f(x, y) &= (y^3 + 2x^2y + 3)^2, \\ f(x, y) &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, & f(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ f(x, y) &= \log(x + \sqrt{x^2 + y^2}), & f(x, y) &= \arctan \frac{x + y}{x - y}, \\ f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & f(x, y, z) &= e^{xy \sin z}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.** Trouver la différentielle de la fonction au point  $(x, y)$  donné :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (1, 1), (0, 1), \\ f(x, y) &= \frac{\cos(x - 2y)}{\cos(x + 2y)}, & \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right), \\ f(x, y) &= \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, & (2, 1). \end{aligned}$$

**Exercice 3.**

– Trouver la dérivée directionnelle  $D_v f(x^0)$ , où :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 3x^2 + 5y^2, & v &= (-1, 1), x^0 = (1, 1), \\ f(x, y) &= x \sin(x + y), & v &= (-1, 0), x^0 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \\ f(x, y, z) &= x^3 + 2xy^2 + 3yz^2, & v &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), x^0 = (1, 2, 1). \end{aligned}$$

– Calculer le gradient de la fonction au point  $x^0$  :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 + x^2y^3, x^0 = (-1, 1), & f(x, y) &= yx^y, x^0 = (2, 1), \\ f(x, y, z) &= \arctan \frac{xy}{z^2}, x^0 = (0, 1, 2), & f(x, y, z) &= \exp(x + xy + xyz), (x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$