Université de Bordeaux

TMQ302 : Fonctions de plusieurs variables

Feuille d'exercices N. 4 : Différentielles premières et deuxiémes

Différentielles premières, homogénéité, accroissements finis

Exercice 1. Soit f une application de classe C^p de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(tx_1, \ldots, tx_d) = t^p f(x_1, \ldots, x_d)$.

(ii) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\sum_{i=1}^d x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = pf(x)$.

(*Indication* : il pourra être utile d'introduire la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(tx)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ fixé ; pour la réciproque, se ramener à l'équation différentielle $t\varphi'(t) = p\varphi(t)$ qu'on résoudra pour $t > 0$ et $t < 0$.)

Exercice 2. **(1)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x) = (x^2, x^3)$. Vérifiez le théorème des accroissements finis sur $I = [0, 1]$: $\|f(1) - f(0)\| \leqslant |1 - 0| \cdot \sup_{x \in I} \|df(x)\|$. Existe-t-il $c \in I$ tel qu'on ait l'égalité des accroissements finis ?

(2) Mêmes questions avec $f(x) = (\cos x, \sin x)$, $I = [0, 2\pi]$.

Différentielles et dérivées partielles secondes, extrema

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$f(x, y) = y^2 \operatorname{Arctan} \frac{x}{y} - x^2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$ si $xy \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ si $xy = 0$.

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que f admet des dérivées partielles premières continues sur $\mathbb{R}^2$.

(3) Justifier que f est continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

(4) Montrer que $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(5) Montrer que $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0, 0)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0, 0)$ existent (les calculer). Les fonctions $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. **(1)** Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par $(F(x, y))(u, v) = (y + 3x^2)u + xv$.

a) Montrer que F est différentiable et déterminer sa différentielle (on précisera l'application $(h, k) \longmapsto \varepsilon((h, k))$).

b) Vérifier que $(F'(x,y)(u,v))(h,k) = (F'(x,y)(h,k))(u,v)$ (où F' désigne la différentielle de F : c'est la même chose que dF ou DF).

(2) Déterminer la différentielle de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy + x^3$. Que représente F pour la fonction f ?

(3) Déterminer la matrice H telle que $(F'(x,y)(u,v))(h,k) = (h,k)H\,{}^t(u,v)$. Que représente la matrice H par rapport à f ?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0$. En utilisant le développement de Taylor avec reste intégral, montrer qu'il existe des fonctions U, V et W continues sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout x, y dans $\mathbb{R}^2$ on ait

$$f(x,y) = x^2U(x,y) + 2xyV(x,y) + y^2W(x,y).$$

Que valent $U(0,0)$, $V(0,0)$ et $W(0,0)$?

Sous quelle condition sur la matrice $\begin{pmatrix} U(0,0) & V(0,0) \\ V(0,0) & W(0,0) \end{pmatrix}$ existe-t-il un $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$, $f(x,y)$ soit positive.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2y + x^2 + y^2$. Déterminer l'ensemble des points (x,y) tels que $df(x,y) = 0$. Pour chacun d'eux, préciser s'il s'agit d'un extremum local ; dans ce cas, préciser sa nature (minimum ou maximum), et si c'est un extremum global.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Montrer que $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ s'annule en quatre points. Quels sont ses extrema locaux ? Préciser leur nature.

Exercice 8. Soient a, b, c trois réels > 0,

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\}$$

et $f : T \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$.

(1) Montrer que f atteint un maximum sur T en un unique point. (On pourra considérer $\overline{T}$.)

(2) Déterminer ce point et la valeur du maximum.

Équations aux dérivées partielles.

Exercice 9. On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a$, où a est un réel.

(1) On note f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.

(2) En déduire que $g(x,y) = \frac{a}{2}(x-y) + F(x+y)$ où F est une fonction arbitraire de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. On cherche toutes les fonctions f de classe C^1 dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a\sqrt{x^2+y^2}$.
Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(1) Montrer que $\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = a$.

(2) Conclure.

Exercice 11. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant les conditions :

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,0) = x \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Soit $\varphi(u,v) = f(-\frac{1}{3}(u-2v), v), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que $f(x,y) = \varphi(-3x+2y, y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = \frac{4}{3}\varphi(u,v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(3) En déduire que $\varphi(u,v) = \varphi(u,0)e^{4v/3}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(4) Grâce aux conditions sur f, calculer $\varphi(u,0)$. En déduire $f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Fonctions implicites

Exercice 12.

1. En utilisant le calcul différentiel sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tous $x > 0$, $y > 0$, il existe un unique $z = z(x,y) > 0$ tel que $ze^z = xe^x + ye^y$, et que la fonction $(x,y) \mapsto z(x,y)$ est de classe C^1.
2. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
3. Montrer que la fonction $u(x,y) = \frac{x+z}{y+z}$ est de classe C^2 et calculer sa différentielle.

Exercice 13. Calculer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction Φ définie implicitement par la relation $\arctan(x\Phi(x)) + 1 = e^{x+\Phi(x)}$ au voisinage de $(0,0)$.