Université de Bordeaux **2017**
TMQ302U – Fonctions de plusieurs variables

Devoir Surveillé Terminal du 09/01/2018.

Documents non-autorisés, durée: 3h.

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées (= démontrées ou bien validées par un contre-exemple).

Exercice 1. (Questions du cours)

1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$, et $f : O \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application. Donner la définition de la limite de l'application $f(x)$ au point x^0.

2. Soit $\bar{v} \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Considérons la droite $L_{\bar{v}}$ passant par x^0 en direction de $\bar{v}$, *i.e.,*
$$L_{\bar{v}} = \{x \in \mathbb{R}^d : x = x^0 + t\bar{v},\ t \in \mathbb{R}\}.$$
L'existence de la limite $\lim_{x\to x^0} f(x)$ implique-t-elle l'existence de la limite $\lim_{t\to 0} f(x^0 + t\bar{v}) = \lim_{x\in L_{\bar{v}}, x\to x^0} f(x)$ pour tout $\bar{v}$? L'implication inverse est-elle vraie? (* donnez une démonstration ou un contre-exemple le cas échéant)

Exercice 2. Étudier l'existence des limites suivantes et les calculer si elles existent:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10x^5 + 5y^4}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\log(3x + 2y)}{\exp(2x - y)},$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^4 + 4y^3}{x^2 + 4xy + 4y^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^4 + 5y^3}{x^2 + 4xy + 6y^2}.$$

Exercice 3. Soit
$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x-y)}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que F admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.

3. Énoncer le critère d'appartenance d'une application à la classe C^1 en termes de ses dérivées partielles.

4. L'application F est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$? sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?

5. Étudier la différentiabilité de l'application F au point $(0, 0)$.

Exercice 4.

1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$, et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction. En énonçant les hypothèses requises, donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f au point x^0.

2. Donner la formule intégrale pour le reste de la formule de Taylor-Young de la question précédente.

TSVP

3. Donner les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions suivantes aux points indiqués:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin(xy)+\cos(xy), \quad x^0 = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2), \\ g(x,y) &= \frac{1}{3x^2+3y^2+2xy+2x+6y+4}, \quad x^1 = (0,-1),\ x^2 = (-1,0), \end{aligned}$$

4. Peut-on affirmer que les points x^0 et x^1, x^2 sont des points extrémaux pour les fonctions f et g de la question précédente?

Exercice 5.

1. Soit $O \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in O$, et $f : O \to \mathbb{R}$ une fonction appartenant à la classe $C^2(O)$. Donner la condition nécessaire pour que le point x^0 soit un point extrémal de f. Idem pour les conditions suffisantes.

2. Calculer les points critiques de fonctions données et préciser leur nature:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4-2x^2, \\ g(x,y) &= \sin(x)\,\sin(y)\,\sin(x+y), \quad (x,y) \in]0,\pi[\times]0,\pi[, \\ h(x,y) &= (8x^2-6xy+3y^2)e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

   Indication : la relation $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ peut être utile pour l'étude da la deuxième fonction.

Exercice 6. Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de la classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. On suppose qu'elles satisfont les équations

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{1}$$

1. Soit $\Delta := \Big(\partial^2/(\partial x^2) + \partial^2/(\partial y^2)\Big)$. Démontrer que

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = 0. \tag{2}$$

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, posons

$$U(x,y) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad V(x,y) = v\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right). \tag{3}$$

   Montrer que U et V satisfont les équations (1) pour $(x,y) \neq (0,0)$.

3. *Application:* Soit maintenant

$$u(x,y) = e^x(x\cos y - y \sin y), \quad v(x,y) = e^x(x \sin y + y \cos y).$$

   (a) Démontrer que ces fonctions u, v satisfont les équations (1).
   (b) Qu'en est il pour les fonctions u, v et les équations (2)? Peut-on dire que les fonctions U et V construites à partir de u et v à l'aide des relations (3), satisfont les équations (2) (pour $(x,y) \neq (0,0)$) également?

FIN