Université de Bordeaux — 2017

TTI303U — Analyse 2 pour Math-Info

Devoir Surveillé du 23/11/2017

Documents et calculatrice non autorisés. Durée: 1h 20

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Vos réponses doivent être justifiées, c'est-à-dire soit démontrées, soit validées par un contre-exemple.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Donner la définition d'un compact de $\mathbb{R}^d$.
2. Donner deux caractérisations de compacité équivalentes à la définition de la question précédente.
3. Soit K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{R}^d$. L'ensemble $K_1 \cup K_2$ est-il compact? Idem pour $K_1 \cap K_2$? Idem pour $K_1 \backslash K_2$?

Exercice 2. *(Cet exercice est un quiz; pour justifier vos réponses donnez des explications succintes (une ou deux phrases), et non pas des démonstrations détaillées)*

Soient

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant x < 3, 0 \leqslant y < x+1\}, \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leqslant y \leqslant 3x-2\}, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, x^2-4x+4 < y \leqslant 2x^2+1\}. \end{aligned}$$

1. Représenter graphiquement chacun de ces ensembles.
2. Trouver l'adhérence et l'intérieur de chacun de ces ensembles.
3. Donner la liste de ces ensembles qui sont ouverts.
4. Donner la liste de ces ensembles qui sont fermés.
5. Donner la liste de ces ensembles qui sont bornés.
6. Donner la liste de ces ensembles qui sont compacts.

Exercice 3. Etudier l'existence des limites suivantes et les calculer si elles existent:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(4x+y)^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^5+7y^6}{x^2-y^2}$$

Exercice 4. Soient a un nombre réel et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (3x^3-y^3)/(2x^2+5y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que l'application f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Calculer
$$\lim_{y\to 0} f(0,y).$$

3. Pour tout nombre réel b, calculer
$$\lim_{x\to 0} f(x,bx).$$

4. Peut-on trouver la valeur $a \in \mathbb{R}$ en sorte que f soit continue en $(0,0)$? Si oui, indiquer cette valeur.

5. Pour le choix de a de la question précédente, peut-on affirmer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier?

Exercice 5. Justifier la différentiabilité des fonctions données sur leur domaine et calculer leur différentielles.

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^3}{x^2+y^2+2}, \quad g(x,y,z) = \sin(x^2y^3+z) + \cos(y^2z^3+x).$$

FIN