	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019 **DS** **Licence** **4TTI303U** **Analyse Math Info** **15/11/2018** **à 11h00** **Durée : 1h20** Documents et calculatrice non autorisés 2 pages Épreuve de Docteur Guillaume Ricotta	**Collège Sciences et Technologies**

Le barème indiqué est sur 30. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. [Questions de cours ; 7 points=1+1+1+1+1+1+1] Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, X_0 un point de $\mathbb{R}^2$ et ℓ un nombre réel.

(1) Donner une définition de A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
(2) Donner une définition de l'intérieur de A.
(3) Donner une définition de A est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
(4) Donner une définition de l'adhérence de A.
(5) Donner une définition de A est compact.
(6) Donner à l'aide de quantificateurs la définition de f admet la limite ℓ en X_0.
(7) Donner une définition de f est continue en X_0.

Exercice 2. [Topologie ; 8 points=0,5+1+0,5+1+0,5+0,5+0,5+1+0,5+1+0,5+0,5] Soient A et B ls sous-sensembles de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, x^2 + 9y^2 \leqslant 1\right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leqslant 1\right\}.$$

(1) Dessiner précisément A.
(2) Déterminer explicitement l'intérieur de A. Justifier votre réponse.
(3) L'ensemble A est-il ouvert ? Justifier votre réponse.
(4) Déterminer explicitement l'adhérence de A. Justifier votre réponse.
(5) L'ensemble A est-il fermé ? Justifier votre réponse.
(6) L'ensemble A est-il compact ? Justifier votre réponse.
(7) Dessiner précisément B.
(8) Déterminer explicitement l'intérieur de B. Justifier votre réponse.
(9) L'ensemble B est-il ouvert ? Justifier votre réponse.
(10) Déterminer explicitement l'adhérence de B. Justifier votre réponse.
(11) L'ensemble B est-il fermé ? Justifier votre réponse.
(12) L'ensemble B est-il compact ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. [Limites ; 8 points=2+2+2+2] Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{e^{x+2y}}{\cos(x) + y^2 + 2}, \\ f_2(x,y) &= \frac{x^3y + xy^3}{x^2 + y^2}, \\ f_3(x,y) &= \frac{xy + x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}, \\ f_4(x,y) &= \frac{x^2y^2}{x^4 + y^6}, \end{aligned}$$

pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(1) f_1 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.
(2) f_2 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.
(3) f_3 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.
(4) f_4 admet-elle une limite en $(0,0)$? Si oui, la déterminer. Justifier votre réponse.

Exercice 4. [Continuité ; 7 points=1+2+1+3] Soient f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = (0,0)$ et

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^5 + y^5 + x^2y^3}{x^4 + y^4}, \\ g(x,y) &= \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{xy^5}{x^6+y^6} \right) \end{aligned}$$

pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(1) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifier votre réponse.
(2) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Justifier votre réponse.
(3) La fonction g est-elle continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifier votre réponse.
(4) La fonction g est-elle continue en $(0,0)$? Justifier votre réponse.