TTI 303, 2018

Correction de l'Exo. 6, TD3

1) La continuité de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = 0 \end{cases}$$

est simple. En effet, $f \in C(\mathbb{R}^{2*})$ (car un quotient des fonctions polynômiales et $x^2+y^2 \neq 0$).
La continuité au pt. $(0,0)$ est aussi facile :
$|x| \leq \|(x,y)\|$, $|y| \leq \|(x,y)\|$ et

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{2\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= 2\|(x,y)\| \to 0 \quad (\text{pour } (x,y) \to 0),$$

d'où la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

---

2) La différentiabilité de f.

2.1) Considérons d'abord la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^{2*}$. On a $(x,y) \neq 0$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-3x^2y^2 - 3y^4 - 2yx^3 + 2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Selon les résultats du cours, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathbb{R}^{2*})$ et donc $f \in C^1(\mathbb{R}^{2*})$.

2.2). Etudions la différentiabilité au pt. $(x,y) = 0$. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ par définition:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\frac{y^3}{y^2}}{y} = -\lim_{y \to 0} \frac{y^3}{y^3} = -1.$$

En posant $L_a = \{(x,y) : y = ax\}$, on trouve

$$\lim_{\substack{(x,y) \to 0 \\ (x,y) \in L_a}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1 + 3a^2 - 2a^3}{(1+a^2)^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \to 0 \\ (x,y) \in L_a}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1 + 3a^2 + 2a}{(1+a^2)^2}.$$

Les valeurs dépendent de $a \in \mathbb{R}$, donc les $\lim\limits_{(x,y) \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\lim\limits_{(x,y) \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}$ n'existent pas. Par conséquent, on ne peut pas vérifier la différentiabilité de f au pt. $(0,0)$ à l'aide de continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On est amené donc à faire la vérification de la différentabilité par définition, à savoir: $x^0 = 0$, $h = (x,y)$.

$$??? \quad \lim_{(x,y) \to 0} \frac{1}{\|(x,y)\|} \Big(f(0+h) - f(0) - (\mathcal{D}f)(0) \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= h} \Big) = 0 \qquad (1)$$

Selon le début de la q. 2.2),

$$\mathcal{D}f(0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(0) \right] = [1, -1],$$

On considère donc $(1) =$

$$\frac{1}{\|(x,y)\|}\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0 - [1,-1]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{\|(x,y)\|}\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - (x-y) \right) = \frac{1}{\|(x,y)\|}\left(\frac{x^3-y^3-(x-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \right) =$$

$$= \frac{\cancel{x^3}-\cancel{y^3}-\cancel{x^3}-xy^2-yx^2-\cancel{y^3}}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Il suffit d'appliquer la méthode du calcul "au long de $L_a = \{(x,y) : y = ax\}$" pour voir que

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}} \text{ n'existe pas.}$$

Le relation (1) n'a pas lieu et $f \notin \mathcal{D}((0,0))$. ∎