Correction de qqs exercices du TD1.

Exo. 4 (TD1). Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble.

Rappelons que
$$A^\circ = \bigcup_{O\text{-ouvert},\, O \subset A} O \, , \quad \bar{A} = \bigcap_{F\text{-fermé},\, A \subset F} F .$$

En particulier, on a tjs $A^\circ \subset A$, $A \subset \bar{A}$. (1)

1) $$\mathbb{R}^d \setminus A^\circ = (A^\circ)^c = \Big(\bigcup_{O\text{-ouvert},\, O\subset A} O \Big)^c \underset{\text{Loi de Morgane}}{=} \bigcap_{O\text{-ouvert},\, O \subset A} O^c \quad ⊜$$

On pose $O^c = F$ - un fermé ; puisque $O \subset A$, on a $A^c \subset O^c = F$, et donc

$$⊜ \bigcap_{F\text{-fermé},\, A^c \subset F} F = \overline{(A^c)} = \overline{(\mathbb{R}^d \setminus A)} .$$

2) On raisonne de la même manière :
$$\cancel{(\mathbb{R}^d \setminus A)^\circ} \quad \mathbb{R}^d \setminus \bar{A} = (\bar{A})^c = \Big(\bigcup_{F\text{-fermé},\, A \subset F} F \Big)^c \underset{\text{Loi de Morgane}}{=} \bigcap_{F\text{-fermé},\, A\subset F} F^c \quad ⊜$$

$F^c = O$, ouvert, $A \subset F \Rightarrow O = F^c \subset A^c$.

$$⊜ \bigcap_{O\text{-ouvert},\, O \subset A^c} O = (A^c)^\circ .$$

3) (cette question n'est pas traitée en cours (optionnelle)).
On dit que l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est dense (ds $\mathbb{R}^d$)

ssi $\forall B(x,r) : B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. (2
$(\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall r > 0)$.

Or, supposons que $(\mathbb{R}^d \setminus A)^\circ = (A^c)^\circ = \emptyset$. Cela veut dire que $\forall O \subset \mathbb{R}^d$ - ouvert, on a $O \not\subset A^c$, ou bien $O \cap A \neq \emptyset$. Posons $O = B(x,r)$, on a donc $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$, d'où le résultat ((l'argument marche aussi dans la direction inverse $\Leftarrow$).

(Exo. 4) ∎

Exo. 5 (TD1)

1) a) Si $A = A^\circ$, A est ouvert, car A° est tjs ouvert.
b) On a $A^\circ \subset A$, cf. (1). Or, si $A^\circ = A$, on peut choisir $A^\circ = O$ - ouvert $= A$, et donc $A \subset A^\circ$, d'où $A = A^\circ$.

2) il suffit d'utiliser la relation $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$. En effet, si A est fermé, on a $B = A^c$ ouvert, et, par 1), $B = B^\circ$. Donc $\overline{(B^c)} = (B^\circ)^c = B^c = A$, et on a $\overline{A} = A$. Idem dans la direction opposée $\Leftarrow$.

(Exo. 5) ∎

Exo. 6 (TD1). Soient $A, B \subset \mathbb{R}^d$.

1) Soit $A \subset B$. Alors, si $O_1 \subset A$, on a $O_1 \subset A \subset B$, où O_1 est un ouvert. Donc

$$A^\circ = \bigcup_{O_1\text{-ouvert}, O_1 \subset A} O_1 \subset \bigcup_{O_2\text{-ouvert}, O_2 \subset B} O_2 = B^\circ$$

(car $O_1 \subset B$ pour tout O_1 de la première réunion).

On fait le même raisonnement pour montrer $\overline{A} \subset \overline{B}$ (ou bien on passe aux complémentaires).

2) Montrons que $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

$$(A\cap B)^\circ = \bigcup_{\substack{O\text{-ouvert},\ O\subset A\cap B}} O \quad \ominus.$$

Or, si $O \subset A\cap B$, on peut tjs réaliser cet ouvert O comme $O_1\cap O_2$, $O_1\subset A$, $O_2 \subset B$, des ouverts. C.à.d :
$\forall O$-ouvert, $O\subset A\cap B$, $\exists O_1 \subset A$-ouvert $\exists O_2\subset B$-ouvert :
$O = O_1\cap O_2$.

$$\ominus \bigcup_{\substack{O_1\subset A,\text{ ouvert}\\ O_2\subset B,\text{ ouvert}}} O_1\cap O_2 \underset{\text{loi distributive}}{=} \Big(\bigcup_{O_1\subset A\text{-ouvert}} O_1\Big)\cap\Big(\bigcup_{O_2\subset B\text{-ouvert}} O_2\Big) = A^\circ\cap B^\circ.$$

Passons à l'inclusion : $A^\circ \cup B^\circ \overset{(?)}{\subset} (A\cup B)^\circ$.

On a :

$$A^\circ\cup B^\circ = \Big(\bigcup_{O_1\subset A,\text{ouvert}} O_1\Big)\cup\Big(\bigcup_{O_2\subset B,\text{ouvert}} O_2\Big) \underset{\text{loi associative}}{=} \bigcup_{O_1\subset A,\text{ ouvert};\ O_2\subset B,\text{ ouvert}} (O_1\cup O_2) \subset$$

$$\subset \bigcup_{O\subset A\cup B,\text{ ouvert}} O = (A\cup B)^\circ.$$

Il est facile de voir que l'inclusion (?) peut ne pas être stricte, en effet : (tout est ds $\mathbb{R}^1$) :

$A = [0,1]$, $A^\circ =]0,1[$.

$B = [1,2]$, $B^\circ =]1,2[$.

$A\cup B = [0,1]\cup[1,2] = [0,2]$, $(A\cup B)^\circ =]0,2[$.

On a $]0,1[\,\cup\,]1,2[\subsetneq]0,2[$.

↳ appartient sans être égale.

3) se fait de la même manière (ou bien par le passage aux complémentaires).

(Exo. 6). ∎