TD 2 : Compacts, convergence de suites des vecteurs, limites et fonctions continues

Dans cette fiche, d est un entier naturel non-nul. L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni d'une norme N qui elle-même induit une distance notée d_N. Par exemple, la norme 1 notée $||.||_1$ qui induit la distance d_1 ou la norme 2 notée $||.||_2$ qui induit la distance d_2 ou la norme ∞ notée $||.||_\infty$ qui induit la distance d_∞.

Exercice 1. Quels ensembles sont-ils compacts parmis les ensembles donnés :

$$A = \{(0,0)\}, \quad B = \{0\} \times [0,1], \quad C = \{0\} \times]0,1[, \quad D =]0,1[\times]0,1[,$$
$$E = [0,1]\times]0,1[, \quad F = \{(x,2x) : x \geqslant 0\}, \quad \tilde{F} = \{(x,2x) : 0 \leqslant x \leqslant 1\},$$
$$G = \{(x,2x) : x > 0\}, \quad H = \{(x,1/x) : x > 0\}, \quad J = \{(x,1/x) : x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(0,0)\}.$$

Exercice 2. Parmi les assertion suivantes, lesquelles sont vraies ? (démonstration ou contre-exemple selon les cas) :

(1) Une intersection (finie ou infinie) de compacts est un compact.
(2) Une réunion (finie ou infinie) de compacts est un compact.
(3) Le complémentaire d'un compact est un compact.
(4) Les ensembles

$$\{(x,y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, xy < 1\}, \quad \{(x,y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0, xy \leqslant 1\}$$

sont compacts.
(5) Les ensembles

$$\{(x,y) : \ 3x^2 + 2y^2 < 1\}, \quad \{(x,y) : \ 4x^2 + 3y^2 \leqslant 1\}$$

sont compacts. La même question pour

$$\{(x,y) : \ 4x^2 + 3y^3 \leqslant 1\}.$$

Exercice 3. Etudier la convergence de suites des vecteurs suivantes et calculer leur limites le cas échéant

$$x^n = \begin{bmatrix} \frac{2n^2+3n+1}{n^2+3} \\ \frac{10n^2-9n+3}{n^3-4n} \end{bmatrix}, \quad y^n = \begin{bmatrix} n\sin(3/n) \\ (n^2-2n+5)e^{-\sqrt{n}} \\ n^2(1-\cos(2/n)) \end{bmatrix}, \quad z^n = \begin{bmatrix} \frac{\log(n^{10}-3)}{\sqrt{n^2+1}} \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/n} \\ \sin n \end{bmatrix}.$$

Exercice 4. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? (démonstration ou contre-exemple selon les cas) :

(1) Toute suite divergente dans $\mathbb{R}^d$ est une somme de deux suites divergentes. Idem pour les suites convergentes.
(2) Toute suite convergente dans $\mathbb{R}^d$ est une somme de deux suites divergentes.
(3) Si les suites numériques (u_n) et (v_n) sont telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent, alors (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 5. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, et $f : A \to \mathbb{R}^{d_1}$ une application définie sur A. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue sur A.
(2) Pour tout ouvert $O_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, il existe un ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$ tel que $f^{-1}(O_1) = A \cap O$.
(3) Pour tout fermé $F_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, il existe un fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ tel que $f^{-1}(F_1) = A \cap F$.
(4) Pour toute suite $(x^n)_n \subset A$ telle que $\lim_{n\to\infty} x^n = x^0 \in A$, on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x^0).$$

Exercice 6. Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x+y}, \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{2x^3+yz^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

et que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 8. Déterminer les limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}.$$

Exercice 9. Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ par

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

et $f_1((0,0)) = f_2((0,0)) = 0$.

Exercice 10. La fonction $f(x,y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ de la manière suivante (respectivement) :

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^4y}{x^4+y^6},$$

$$\frac{xy^4}{x^4+y^6}, \quad y^2\sin\frac{x}{y}$$

et $f((0,0)) = 0$. Étudier sa continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Soient $f, g : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ deux applications continues.

(1) Montrer que $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^{d_1}, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{d_1}$.

(2) Montrer que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \leqslant 1\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$, et que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, xy < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(3) En utilisant la question 2. et l'application $(x,y) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ répondre à la question suivante : l'image d'un fermé par une application continue est-elle fermée ?

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit le graphe de f, ensemble noté Γ par

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = f(x)\}$$

Montrer que Γ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-ce vrai si l'application n'est pas continue ?

Exercice 13. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}^{d_1}$ une fonction continue définie là-dessus. Démontrer que $f(K)$ est compact.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, périodique et non constante. On note

$$G_f = \{T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$$

l'ensemble des périodes de f.

(1) Montrer que G_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

(2) Montrer que G_f est un fermé de $\mathbb{R}$.
(3) En déduire l'existence d'une plus petite période strictement positive de f.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique. Montrer que f est constante.

Exercice 16.
(1) Construire une fonction continue qui s'annule exactement sur $\mathbb{Z}$.
(2) Construire une fonction continue qui s'annule exactement sur $2\mathbb{Z}$.
(3) Construire une fonction continue qui s'annule exactement sur

$$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^*\right\} \cup \{0\}.$$

(4) Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}.$$

(5) Construire une fonction continue qui s'annule exactement sur

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \geqslant 1\right\} \cup \{0\}.$$

(6) Soient A et B deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^p$. Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

pour tout x dans $\mathbb{R}^p$ est une fonction continue qui vaut 0 sur A et 1 sur B.

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui transforme toute suite convergente en une suite convergente. Montrer que f est continue.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et nulle sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f est nulle.

Exercice 19.
(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, nulle en 1 qui vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f est nulle.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 qui vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f est une homothétie.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$f(x) \to +\infty$$

lorsque $|x| \to +\infty$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21.
(1) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) > 0.$$

Montrer que P admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
(2) Ce résultat reste-t-il valide pour un polynôme à deux variables ?

Exercice 22.
(1) Montrer que le seul sous-groupe compact de $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$ est $\{0\}$.
(2) Montrer que les sous-groupes compacts de $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \times\right)$ sont la sphère euclidienne de centre 0 et de rayon 1 et l'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité pour tout entier naturel non-nul n.