TD 3 : Différentiabilité, dérivées partielles, différentielle seconde, étude d'extrema des fonctions

Par défaut, l'espace en question est $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne.

Exercice 1. *(Un peu de revision)*

Soit $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et $f(0,0) = 0$.

(1) f est-elle continue en $(0,0)$?

(2) Montrer que pour toute courbe indéfiniment dérivable $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(0) = (0,0)$, ayant en $t = 0$ une tangente géométrique non parallèle aux axes Ox, Oy, la restriction $f_{|\gamma}$ est continue en $t = 0$. (On rappelle que la tangente géométrique à γ en $t = 0$ est dirigée par la première dérivée non nulle $\gamma^{(p)}(0)$, si elle existe.)

Exercice 2. *(Quelques propriétés élémentaires d'applications différentiables)*

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $x^0 \in A$ et $f, g : A \to \mathbb{R}^{d_1}$ des applications différentiables au point x^0.

1. Démontrer que f est continue au point x^0.
2. Montrer que, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'application $\lambda f + \mu g$ est différentiable au point x^0 et
$$D(\lambda f + \mu g)(x^0) = \lambda (Df)(x^0) + \mu (Dg)(x^0).$$
3. Soit maintenant $g : A \to \mathbb{R}$. Montrer que $g \cdot f$ est différentiable au point x^0 et donner la formule pour sa différentielle.
4. Encore dans le cas $g : A \to \mathbb{R}$, supposons que $g(x^0) \neq 0$. Montrer que f/g est différentiable au point x^0 et donner la formule pour sa différentielle.

Exercice 3. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables sur leur domaine de définition et calculer leur différentielle :

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x^2z - 2xy, z^3 - xyz)$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y \sin x, \cos x)$.

Exercice 4.

(1) Montrer que toute application linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et donner sa différentielle.

(2) Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^n$ n'est jamais différentiable en 0. Donner un exemple de norme différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Est-ce le cas de toute norme ?

Exercice 5. Soit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $\varepsilon_x : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varepsilon_x(f) = f(x)$ ("évaluation" en x) est différentiable en tout point f et calculer sa différentielle.

(2) Montrer que l'application $(\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$, $(X_1, X_2) \mapsto \det(X_1, X_2)$ est différentiable en tout point (X_1, X_2) et calculer sa différentielle.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Étudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 7. Etudier la différentiabilité de fonctions suivantes et trouver la différentielle lorsqu'elle existe.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y, & f(x,y) &= (y^3 + 2x^2y + 3)^2, \\ f(x,y) &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, & f(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ f(x,y) &= \log(x + \sqrt{x^2+y^2}), & f(x,y) &= \arctan\frac{x+y}{x-y}, \\ f(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & f(x,y,z) &= e^{xy\sin z}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Trouver la différentielle de la fonction au point (x,y) donné :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & &(1,1),\ (0,1), \\ f(x,y) &= \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}, & &(\frac{\pi}{4},\pi), \\ f(x,y) &= \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, & &(2,1). \end{aligned}$$

Exercice 9. Calculer le gradient de la fonction au point x^0 :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x^2y^3,\ x^0 = (-1,1), & f(x,y) &= yx^y,\ x^0 = (2,1), \\ f(x,y,z) &= \arctan\frac{xy}{z^2},\ x^0 = (0,1,2), & f(x,y,z) &= \exp(x + xy + xyz),\ (x_0,y_0,z_0). \end{aligned}$$

Exercice 10.

(1) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leqslant x^2 - xy + y^2$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^py^q}{x^2-xy+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, où p,q sont des entiers $\geqslant 1$. Pour quelles valeurs de p,q cette fonction est-elle continue ?

(3) Montrer que si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle en ce point est nulle. En déduire que f est différentiable en $(0,0)$ *ssi* $p + q \geqslant 4$.

Exercice 11. *(Dérivées partielles)*

Justifier l'existence des dérivées partielles premières des fonctions suivantes, et les calculer : (i) $f(x,y) = e^x \cos y$; (ii) $g(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$; (iii) $h(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

(1) f est-elle continue en $(0,0)$?

(2) f admet-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?

(3) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 13. *(Jacobiennes)* Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par $f(x,y,z) = (x^2+y^2, xyz)$, $g(u,v) = (uv, u^2v^2, e^v)$. Calculer les matrices jacobiennes de $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 - xy^2.$$

Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique de f, qu'il n'est pas un extremum local, mais pourtant la restriction de f à toute droite passante par $(0,0)$ admet en ce point un minimum local.

Exercice 15. Ecrivez la formule de Taylor de second ordre pour chacune des fonctions suivantes au point (x_0,y_0) donné :

1. $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$;

2. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$;
3. $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \cos xy$, $(x_0, y_0) = (0,0)$;
4. $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$;
5. $f(x,y) = e^{(x-1)^2} \cos y$, $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Exercice 16. Pour chacune des fonctions suivantes étudiez la nature du point critique donné :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, au point critique $(0,0)$;
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$, au point critique $(0,0)$;
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$, au point critique $(0,0,0)$;
4. $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$, au point critique $(0,0)$.

Exercice 17. Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

1. $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$;
2. $f(x,y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$;
3. $f(x,y,z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$;
4. $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

1. Étudier les extremums locaux de f.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Montrer que f a un maximum M et un minimum m sur D.
3. Soit $(x,y) \in D$. Montrer que si $f(x,y) = M$ ou $f(x,y) = m$, alors $x^2 + y^2 = 1$.
4. Étudier la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$. En déduire les valeurs de M et m.