Devoir Maison I - Analyse 3

Exercice 1 Déterminer la convergence des intégrales suivantes. Dans le cas de convergence calculer la valeur:

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx \qquad \int_0^\infty \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \qquad \int_1^\infty \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}}dx.$$

Exercice 2 Discuter la convergence des intégrales suivantes. Ne pas chercher à les calculer.

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3}}dx \qquad \int_0^{50} \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad \int_0^\infty x^{70}e^{-x}dx \qquad \int_1^\infty \frac{x}{x^2-\sin(x)}$$

Exercice 3 (a) Donner un exemple d'une série $\sum_{n=0}^\infty a_n$ de terme générale a_n telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mais $\sum_{n=0}^\infty a_n$ diverge.
(b) Donner un exemple d'une série $\sum_{n=0}^\infty a_n$ qui converge mais pas absolument.

Exercice 4 Montrer que, si la série $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge conditionellement mais pas absolument, alors et $A = \{n : a_n > 0\}$ et $B = \{n : a_n < 0\}$ sont de cardinal infini.

Exercice 5 Étudier la nature des séries de terme général

$$\frac{\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{(\ln(n))^3}{n^2} \qquad \frac{n2^n}{3^n+1} \qquad \frac{n^3+n^2}{n^5+1} \qquad \frac{(2n!)}{2^n}$$

Exercice 6 Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme générale

$$\frac{(\alpha-1)^k}{k}.$$