Exercice 1

Rappel : *Soit* (A_n) *une suite de parties de* Ω. *On pose*

$$\limsup A_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right) \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_n \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right).$$

On remarque que $x \in \limsup A_k$ *si et seulement si* $x \in A_k$ *pour une infinité d'indices* k *et que* $x \in \liminf A_k$ *si et seulement si* x *appartient à tous les* A_k *sauf peut-être un nombre fini.*

1. *Soit* Ω *un ensemble et* (A_n) *une suite de parties de* Ω. *Déterminer* $\limsup A_n$ *et* $\liminf A_n$ *dans les cas*
   — (A_n) *est monotone (par rapport à l'ordre partiel d'inclusion)*
   Si (A_n) est croissante alors pour tout entier n, $\bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k\geq 0} A_k$ et $\bigcap_{k\geq n} A_k = A_n$. D'où $\limsup A_n = \bigcup_{k\geq 0} A_k = \liminf A_n = \lim A_n$.
   Si (A_n) est décroissante alors pour tout entier n, $\bigcup_{k\geq n} A_k = A_n$ et $\bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcap_{k\geq 0} A_k$. D'où $\limsup A_n = \bigcap_{k\geq 0} A_k = \liminf A_n = \lim A_n$.
   — $A_{2n} = B$ *et* $A_{2n+1} = C$ *où* B, C *sont deux parties de* Ω.
   Pour tout entier n, $\bigcup_{k\geq n} A_k = B \cup C$ et $\bigcap_{k\geq n} A_k = B \cap C$ puisqu'il y a toujours au moins un indice pair et un indice impair. D'où
   $$\limsup A_n = B \cup C \quad \liminf A_n = B \cap C.$$
   — *les* A_n *sont deux à deux disjoints.*
   En utilisant la remarque donnée en rappel, si les A_n sont deux à deux disjoints alors il est impossible d'appartenir à une infinité de A_k, d'où
   $$\limsup A_n = \liminf A_n = \emptyset.$$

Dans la suite de l'exercice on suppose que l'on a $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré et que pour tout entier* n, $A_n \in \mathcal{T}$.

1. *Justifier que* $\limsup A_n$ *et* $\liminf A_n$ *sont dans* $\mathcal{T}$.
   Ces deux ensembles sont des intersections et réunions dénombrables d'éléments de la tribu donc sont dans la tribu.
2. *Montrer que* $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ *("propriété de Fatou").*
   Notons $\mathcal{A}_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$, alors $(\mathcal{A}_n)_n$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ (cf. $\mathcal{A}_n = A_n \cap \mathcal{A}_{n+1}$) et par propriété d'une mesure
   $$\mu\left(\bigcup_n \mathcal{A}_n\right) = \lim_n \mu\left(\mathcal{A}_n\right).$$
   De plus pour tout entier $k \geq n$, $\mathcal{A}_n \subset A_k$ d'où $\mu\left(\mathcal{A}_n\right) \leq \inf_{k\geq n} \mu(A_k)$ et
   $$\mu(\liminf A_n) \leq \lim_n \left(\inf_{k\geq n} \mu(A_k) \right) = \liminf \mu(A_n).$$
3. *On suppose de plus qu'il existe* B *dans* $\mathcal{T}$ *tel que* $\mu(B) < +\infty$ *et pour tout entier* n, $A_n \subset B$ *(donner un exemple de mesure pour laquelle cette condition est toujours vérifié). Montrer que* $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.
   Pour que la condition soit toujours vérifiée, il suffit de prendre une mesure finie (par exemple une mesure de probabilité).
   En travaillant avec $B_n = B \setminus A_n$ on a $(B_n)_n$ suite croissante de $\mathcal{T}$ et avec la propriété de Fatou
   $$\mu(\liminf B_n) \leq \liminf \mu(B_n). \tag{1}$$
   $\liminf B_n = B \setminus \limsup A_n$ et $\mu(B)$ étant fini,
   $$\mu(\liminf B_n) = \mu(B) - \mu(\limsup A_n). \tag{2}$$
   De même
   $$\liminf \mu(B_n) = \liminf(\mu(B) - \mu(A_n)) = \mu(B) - \limsup \mu(A_n). \tag{3}$$
   L'inégalité demandée est obtenue avec (1), (2) et (3).

4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu(\Omega) < +\infty$. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$.*

   On note pour tout entier n, $\mathcal{A}_n = \cup_{k\geq n} A_k$. La suite $(\mathcal{A}_n)_n$ est décroissante, par propriété d'une mesure finie (rappel : ce résultat n'est pas vrai en général)

$$0 \leq \mu(\limsup A_n) = \mu\left(\bigcap_n \mathcal{A}_n\right) = \lim_n \mu(\mathcal{A}_n) \leq \lim_n \sum_{k\geq n} \mu(A_k).$$

   On reconnait dans le terme de droite de l'inégalité ci-dessus, la limite du reste d'une série convergente, cette limite est nulle.

Exercice 2

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et (f_n) une suite de fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles et mesurables ($\mathbb{R}$ est muni de la tribu borélienne). On note $A = \{x \in \Omega \ : \ (f_n(x))_n \text{ converge}\}$.

1. *Rappeler la définition de suite de Cauchy.*

   Une suite $(u_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

   ou encore de façon équivalente

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \ \exists n_q \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_q, \forall p \in \mathbb{N}, \ |u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{q}.$$

2. *Exprimer A à l'aide des ensembles $A_{n,p,q} = \{x \in \Omega \ : \ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{1}{q}\}$.*

   Toute suite convergente est de Cauchy et dans $\mathbb{R}$, qui est complet (pour la valeur absolue), toute suite de Cauchy converge d'où

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \Omega \ : \ (f_n(x))_n \text{ est de Cauchy}\} \\ &= \bigcap_{q\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_{n,p,q} \end{aligned}$$

3. En déduire que A appartient à $\mathcal{T}$.

   $A_{n,p,q} = (f_n - f_{n+p})^{-1}\left(]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[\right)$, $]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc un borélien. Les fonctions sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc pour tous entiers n, p et q, $A_{n,p,q}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

   Une tribu étant stable par intersection et réunion dénombrable, A appartient à $\mathcal{T}$.

Exercice 3

On considère $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, et E un ensemble borélien de mesure de Lebesgue finie : $\lambda(E) < \infty$.

Dans la correction puisqu'il n'y a pas d'ambiguïté ici, on parlera de fonction mesurable sans préciser que c'est pour la tribu des boréliens.

1. *On prend $E = [0,1]$ et g une fonction en escalier sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que $\lambda(E \setminus K) \leq \varepsilon$ et que $g_{|K}$ soit continue sur K.*

   g fonction en escalier sur $[0,1]$ donc il existe une subdivision finie de l'intervalle, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ et une famille de réels $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que

$$\forall i \in \{1, \ldots n\} \quad g(x) = a_i \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[$$

   Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et $0 \leq \alpha < \frac{1}{n} \min\{\varepsilon, x_i - x_{i-1} \ 1 \leq i \leq n\}$; on pose $K = \bigcup_{1\leq i\leq n} [x_{i-1} + \frac{\alpha}{2}, x_i - \frac{\alpha}{2}]$. K est une union finie d'intervalles fermés, bornés de $\mathbb{R}$ donc est un compact de $\mathbb{R}$ et par construction $\lambda([0,1] \setminus K) = n\alpha < \varepsilon$.

   Les intervalles $[x_{i-1} + \frac{\alpha}{2}, x_i - \frac{\alpha}{2}]$ sont 2 à 2 disjoints pour $1 \leq i \leq n$ et $g_{|K}$ est constante sur chaque intervalle, la fonction est donc continue sur K.

2. *Soit g une fonction mesurable étagée à valeurs réelles définie sur E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que $\lambda(E \setminus K) \leq \varepsilon$ et que $g_{|K}$ soit continue sur K.*

g fonction étagée sur E donc il existe une partition finie de E d'ensembles mesurables $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ et une famille de réels $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

Pour tout i, A_i est contenu dans E donc est de mesure de Lebesgue finie, d'où

$$\forall i \ : \ 1 \leq i \leq n \quad \exists K_i \text{ compact, } K_i \subset A_i \text{ et } \lambda(A_i \setminus K_i) \leq \varepsilon/n$$

En prenant $K = \bigcup_{1\leq i\leq n} K_i$ on a K compact comme union finie de compacts. Les compacts K_i sont 2 à 2 disjoints pour $1 \leq i \leq n$ et $g_{|K}$ est constante sur chaque K_i, la fonction est donc continue sur K. Enfin

$$\lambda(E \setminus K) = \lambda(\bigcup_{1\leq i\leq n} (A_i \setminus K_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_i \setminus K_i) \leq \varepsilon.$$

3. *Pour cette question on considère le cas particulier où $E = [0,1]$ et on prend pour g la fonction indicatrice de $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Construire « à la main » un compact $K \subset E$ tel que $\lambda(E \setminus K) \leq \varepsilon$ et tel que la restriction de g à K soit constante égale à 1 (et donc continue). (Indication : en utilisant la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ trouver un ouvert contenant $\mathbb{Q}$ de mesure plus petite que ε.)*

   On cherche à construire un ouvert O contenant $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ et qui est de mesure de Lebesgue inférieure ou égale à ε.

   $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ étant dénombrable ou peut l'écrire

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{x_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}.$$

   On pose $O = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}[$. O est une union d'ouverts donc est ouvert et par σ-additivité de la mesure de Lebesgue

$$\lambda(O) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

   $K = [0,1] \setminus O$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$ donc compact et $\lambda([0,1] \setminus K) = \lambda(O) \leq \varepsilon$. De plus, par construction $K \subset [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, d'où $g_{|K} = 1$.

4. *Soit g une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur E. En utilisant la question 2. et le théorème d'Egoroff (énoncé ci-dessous), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien $A \subset E$ tel que $\lambda(A) \leq \varepsilon$ et que $g_{|E\setminus A}$ soit continue sur $E \setminus A$.*

   $g = g^+ - g^-$ avec $g^+ = \sup\{g, 0\}$ et $g^- = \sup\{-g, 0\}$, g étant mesurable et le sup de fonctions mesurables l'étant aussi, g^+ et g^- sont des fonctions mesurables et positives.

   On sait que pour toute fonction mesurable positive, il existe une suite de fonctions étagées qui converge simplement vers cette fonction. On note $(f_n)_n$ et $(h_n)_n$ deux suites de fonctions étagées qui convergent respectivement vers g^+ et g^-. On pose pour tout entier n, $g_n = f_n - h_n$, alors la suite de fonctions étagées $(g_n)_n$ converge simplement vers g sur E.

   Soit $\varepsilon > 0$ donné, avec le théorème d'Egoroff (rappel $\lambda(E) < \infty$) il existe un borélien B tel que $\lambda(B) \leq \varepsilon/2$ et $(g_n)_n$ converge uniformément vers g sur $E \setminus B$.

   Avec ce qui a été montré à la question 2 pour les fonctions étagées, pour tout entier n, il existe un compact K_n tel que $g_{n|K_n}$ est continue sur K_n et $\lambda(E \setminus K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$.

   En posant $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $A = (E \setminus K) \cup B$, on a A borélien comme intersection et réunion dénombrable de boréliens et

$$\lambda(A) \leq \lambda(E \setminus K) + \lambda(B) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

   De plus $E \setminus A \subset K$ donc la suite $(g_{n|E\setminus A})_n$ est une suite de fonctions continues sur $E \setminus A$.

   Enfin $E \setminus A \subset E \setminus B$ donc la suite $(g_{n|E\setminus A})_n$ converge uniformément vers $g_{|E\setminus A}$ sur $E \setminus A$ et, avec ce qui précède, la fonction $g_{|E\setminus A}$ est continue sur $E \setminus A$.

Exercice 4

On rappelle que pour une fonction continue et positive l'intégrale de Riemann généralisée et l'intégrale de Lebesgue coincident.

1. *Donner un exemple de fonction positive, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.*

   Soit la fonction affine par morceaux définie par (faire un dessin)

$$f(x) = \begin{cases} n^2(x-n)+1 \text{ pour } x \in [n-\frac{1}{n^2}, n],\ n \geq 2 \\ -n^2(x-n)+1 \text{ pour } x \in [n, n+\frac{1}{n^2}],\ n \geq 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Alors f est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$, $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

2. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, continue et intégrable. Soit (λ_n) une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_0^\infty f(\lambda_n x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

   Pour tout entier n, $f(\lambda_n \cdot)$ est une fonction à valeurs positives et mesurable car elle est continue sur $\mathbb{R}$. Avec le corolaire pour les séries du théorème de convergence monotone

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_0^\infty f(\lambda_n x) \right) dx = \sum_0^\infty \int_{\mathbb{R}} f(\lambda_n x)\,dx.$$

   En utilisant que l'intégrale de Lebesgue et que l'intégrale de Riemann généralisée coïncident ici, ainsi que le changement de variable $u = \lambda_n x$ (cf. $\lambda_n > 0$) on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_0^\infty f(\lambda_n x) \right) dx = \sum_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{1}{\lambda_n}\,du = \left(\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_n} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du < +\infty.$$

   La fonction $x \mapsto \sum_0^\infty f(\lambda_n x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3. *En déduire que pour presque tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n x) = 0$.*

   On sait qu'une fonction intégrable est finie pour presque tout réel x donc la série converge pour presque tout x. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, en conséquence pour presque tout réel x, $\lim_{n\to+\infty} f(\lambda_n x) = 0$.