

Stabilité d'écoulements bifluides dans un microcanal

Annie Colin et Pierre Guillot

Université Bordeaux I, Rhodia Laboratoire du Futur, Unité mixte Rhodia-CNRS
178 Avenue Schweitzer, 33608 Pessac

Charles-Henri Bruneau, Thierry Colin et Sandra Tancogne

Université Bordeaux I, MC2-Inria Futurs, CNRS UMR 5466
351 Cours de la Libération, 33405 Talence
Sandra.Tancogne@math.u-bordeaux1.fr

Résumé :

L'instabilité de Plateau-Rayleigh est une instabilité classique, liée aux effets interfaciaux, qui concerne les écoulements de cylindres de fluides. Afin d'abaisser son énergie de surface, le cylindre va se fragmenter et former des gouttes. En microfluidique, les phénomènes de tension de surface prédominent. Par conséquent, lorsque l'on considère l'écoulement de deux fluides dans un microcanal cylindrique, suivant les conditions de la manipulation, on peut observer le morcellement du fluide interne.

Les expériences montrent qu'il y a trois types de configurations : la formation de gouttes, bouchons ou la persistance du jet. Ces arrangements résultent de la compétition entre le confinement, la vitesse du jet et le gain d'énergie à faire des gouttes.

Partant des constatations expérimentales, le travail consiste à réaliser numériquement une étude paramétrique afin de comprendre le rôle des variables physiques en présence (vitesses d'injections des fluides, viscosité, tension de surface).

Abstract :

Plateau-Rayleigh instability is a well known instability, due to interfacial effects, that concerns cylindrical jets. In order to reduce surface energy, the cylinder will split up and create droplets. In microfluidics context, the gravity is negligible and surface tension phenomenons are predominant. When considering coflows in a cylindrical microchannel, one can observe the parcelling out of the internal fluid depending on the experimental conditions. Transition between situations where the flow is a jet or a drop can also be observed.

Experiments tend to show that these arrangements result from the competition between containment, the speed and the profit of energy to make drops.

In this work, we make a mathematical and numerical analysis to predict this kind of phenomenons and understand the competition between physical variables.

Mots-clefs :

Microfluidique ; Instabilité Plateau-Rayleigh ; Théorie linéaire de la stabilité

1 Introduction

C'est Plateau qui le premier, a compris qu'un cylindre de fluide se déforme et se fragmente spontanément afin d'abaisser son énergie de surface et ceci dès que la longueur d'onde de la déformation est au moins de l'ordre du périmètre du cylindre. Rayleigh a montré que la taille

de la goutte formée est caractérisée par le mode de déformation le plus rapide (deG05). Ces écoulements à haut nombre de Reynolds et en absence de confinement ont été largement étudiés dans les 20 dernières années en raison de la pertinence des applications industrielles qui y sont associées. Les jets formés sont instables et la transition jet-goutte est associée à la nature de l'instabilité de Rayleigh absolue ou convectée (Lin98). Dans ce travail, nous nous intéressons à la stabilité de jets diphasiques dans des microcanaux cylindriques de taille submillimétrique. La spécificité de cette configuration est qu'à cette échelle le fluide est confiné et le profil d'écoulement parabolique. Une analyse de l'instabilité de Rayleigh dans le cadre de l'approximation de la lubrification et des équations de Stokes permet de retrouver grossièrement le comportement. Toutefois, cette analyse ne permet pas de déduire la taille des gouttes, du fait de l'approximation de la lubrification. Par ailleurs, la limitation aux faibles nombres de Reynolds pose problème car dans de nombreux écoulements considérés, ce dernier atteint des valeurs proches ou supérieures à 1. Nous nous proposons ici de revisiter ce problème en travaillant dans un premier temps en dehors du cadre de l'approximation de la lubrification.

Ainsi, nous présentons les dispositifs et résultats expérimentaux pour cette gamme d'écoulements. Ensuite, nous réalisons une analyse mathématique basée sur la théorie linéaire de la stabilité. Puis, nous commenterons et recouperons résultats expérimentaux et théoriques.

Tout d'abord, nous présentons les notations utilisées dans ce document, elles sont illustrées sur la figure 1. Le fluide interne noté i est totalement enveloppé par l'externe e . Le rayon du

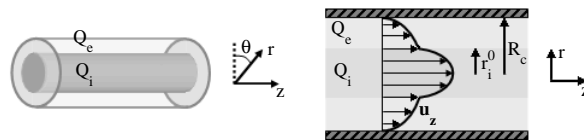


FIG. 1 – Configurations et notations.

capillaire est noté R_c et celui du fluide interne r_i^0 . Dans ce type de canal à section circulaire, l'écoulement u_z est de type Poiseuille.

2 Résultats expérimentaux (G-C06)

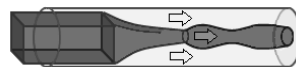


FIG. 2 – Schéma du dispositif microfluidique

Deux capillaires en verre sont étirés et emboîtés l'un dans l'autre. Le capillaire interne est initialement de section carrée ce qui permet de faciliter le centrage du dispositif. Les débits des deux fluides sont contrôlés et les écoulements sont observés sous un microscope optique. Les images sont enregistrées avec une caméra rapide.

Le fluide externe est de l'huile de silicone de viscosité dynamique 235 mPa.s et le fluide interne est un mélange d'eau et de glycérol à 55 mPa.s. Le rayon du capillaire est $275 \mu\text{m}$ et la tension de surface vaut 24mN/m. Dans la gamme des débits étudiés, il existe deux grandes catégories d'écoulements : les gouttes et les jets. On trouve dans ces 2 grandes familles des sous-ensembles. Les gouttes peuvent être non déformées par les murs ou au contraire plus grandes que le rayon du capillaire : on parle de bouchons(plugs). Le jet peut lui être oscillant, stable sur

la longueur du capillaire ou relativement fin et se déstabiliser après une distance finie (jetting). Les jets existent pour des bas débits de phase externe ainsi que pour les hauts débits lorsque que le débit interne est grand. La figure 2 illustre ces résultats.

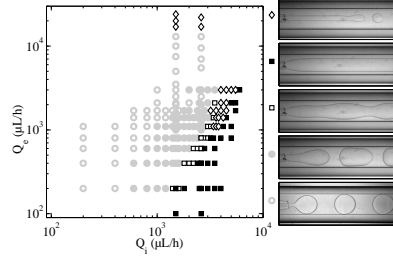


FIG. 3 – Diagramme d'écoulement en fonction des débits (Q_i et Q_e). Les symboles grisés et noirs sont associés respectivement au régime de gouttes et de jet.

3 Modélisation

Le comportement des fluides est régi par les équations de Navier-Stokes munies des hypothèses de stationnarité, d'incompressibilité et de vitesse nulle à la paroi,

$$\begin{aligned} \rho(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} &= -\vec{\nabla}P + \eta\Delta\vec{u}, & \text{dans } \Omega^{i,e}(t), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, & \text{dans } \Omega^{i,e}(t), \\ \vec{u} &= \vec{0}, & \text{dans } \Omega^{i,e}(t) \cap \delta\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

où $\Omega^{i,e}$ désigne le domaine d'étude (Ω^i l'interne et Ω^e l'externe), \vec{u} est la vitesse du fluide, η sa viscosité dynamique, ρ la masse volumique et P la pression.

A l'interface $\Gamma(t)$, les deux fluides sont soumis à une discontinuité du tenseur des contraintes (équilibre des contraintes tangentielles liées à la tension de surface) et à la continuité de la vitesse.

$$\begin{aligned} [\sigma\vec{n}] &= \gamma/R\vec{n}, & \text{sur } \Gamma(t), \\ \vec{u}_e &= \vec{u}_i, & \text{sur } \Gamma(t), \end{aligned} \quad (2)$$

où σ désigne le tenseur des contraintes, γ le coefficient de tension superficielle, \vec{n} le vecteur normal à l'interface et $\frac{1}{R}$ la courbure moyenne.

De plus, le déplacement de l'interface est donné par l'équation à surface libre

$$\partial_t h + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} h = 0, \text{ sur } \Gamma(t), \quad (3)$$

avec h la position de l'interface.

Le problème est traité du point de vue mathématique selon le principe de la théorie linéaire de la stabilité (Cha61). Partant de l'état stationnaire du système, nous supposons que les différentes quantités physiques en présence sont assujetties à une petite variation, induite par un déplacement ξ de l'interface par rapport à l'état stable (figure 4).

Nous regardons dans ces conditions la réaction du système à ces petites perturbations. Si ce dernier est instable, la perturbation va croître et le système ne retrouvera jamais son état initial. Dans le cas contraire, il est stable. Ainsi partant de l'état stationnaire, les variables physiques se décomposent en la somme d'une composante stable et sa perturbation $\mathbf{f}(r, z, t) = \mathbf{f}^0(r, z, t) + \epsilon\mathbf{f}^1(r, z, t)$. D'après l'hypothèse des petites perturbations, nous négligeons tous les

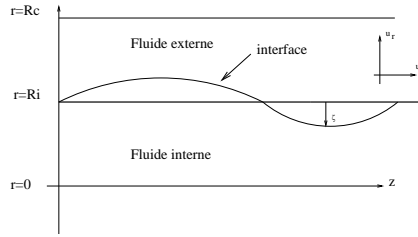


FIG. 4 – Perturbation de la position de l'interface par rapport à l'état stationnaire. ξ est de faible amplitude devant r_i . u_r est la composante radiale de la vitesse et u_z la composante longitudinale

termes d'ordre supérieur à 1, $\mathbf{f}^1(r, z, t)$ est alors solution d'un système perturbé linéaire. La stabilité *globale* va dépendre de la stabilité en réponse à toutes les perturbations possibles. En pratique la perturbation est décomposée suivant les modes normaux (modes de fourier)

$$\mathbf{f}^1(r, z, t) = \mathbf{f}^1(r)e^{\omega t - ikz},$$

tel que ω désigne le taux de croissance de l'instabilité, k le nombre d'onde de la perturbation dans la direction de l'écoulement. Si plusieurs d'entre eux correspondent à un état instable, nous cherchons alors celui pour lequel nous avons la plus grande amplitude car c'est vers ce mode que notre système va tendre : on observe alors la formation de gouttes. La connaissance de cette valeur va nous servir à apprécier la taille de la goutte générée grâce à la relation : $\lambda = 2\pi k_{max}^{-1}$ où λ est la longueur d'onde.

Dans notre étude, l'état stationnaire est décrit par les équations de Stokes, le gradient de pression est constant dans la direction de l'écoulement, le saut de pression est donné par la loi de Laplace et les vitesses en coordonnées cylindriques par les expressions suivantes :

$$v_e(r) = \frac{\Delta P}{4\eta_e L}(r^2 - R_c^2), \quad v_i(r) = \frac{\Delta P}{4\eta_i L}(r^2 - (r_i^0)^2) + \frac{\Delta P}{4\eta_e L}((r_i^0)^2 - R_c^2). \quad (4)$$

Aussi, connaissant les formules de vitesses, les débits sont donnés par :

$$Q_e(r) = \frac{\pi \Delta P}{8\eta_1 L} \left(-R_c^4 - (r_i^0)^4 + 2(r_i^0 R_c)^2 \right), \quad Q_i(r) = \frac{\pi \Delta P}{L} \left(\frac{(-r_i^0)^4}{8\eta_2} + \frac{(r_i^0)^4 - (r_i^0 R_c)^2}{4\eta_1} \right). \quad (5)$$

Le principe de conservation des débits permet de déduire la position de l'interface : $\frac{Q_i}{Q_e} = f(r_i)$ où $f(r_i)$ est un polynôme de degré 4 en r_i à résoudre, r_i^0 est la racine réelle comprise entre 0 et R_c .

Les perturbations en vitesse- pression s'écrivent :

$$\tilde{u}_r = u_r(r)e^{\omega t - ikz}, \quad \tilde{u}_z = v(r) + u_z(r)e^{\omega t - ikz}, \quad \tilde{P} = P_0 + P(r)e^{\omega t - ikz},$$

elles sont solutions du système d'équations monodimensionnelles (nous omettons les $\tilde{\cdot}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^{i,e} (-iku_r^{i,e} v^{i,e}(r)) = -\partial_r P^{i,e} + \eta^{i,e} \left(\partial_r^2 u_r^{i,e} + \frac{1}{r} \partial_r u_r^{i,e} - k^2 u_r^{i,e} - \frac{u_r^{i,e}}{r^2} \right) \\ \rho^{i,e} (u_r^{i,e} v^{i,e}(r) - iku_z^{i,e} v^{i,e}(r)) = ikP^{i,e} + \eta^{i,e} \left(\partial_r^2 u_z^{i,e} + \frac{1}{r} \partial_r u_z^{i,e} - k^2 u_z^{i,e} \right) \\ \frac{1}{r} \partial_r (r u_r^{i,e}) - iku_z^{i,e} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

En tirant profit de la géométrie cylindrique et en éliminant $P(r)$, nous aboutissons à l'écriture d'une équation sur la vorticité $Z(r)$:

$$\partial_r^2 Z(r) + \frac{1}{r} \partial_r Z(r) - \left(-ik \frac{\rho}{\eta} v(r) + \frac{1}{r^2} + k^2 \right) Z(r) = 0. \text{ dans chaque fluide} \quad (7)$$

où $Z(r) = u_r + \frac{1}{ik} \partial_r u_z$.

Pour la relation à surface libre, cela se traduit par $h(r, z, t) = r_i^0 + \xi(r) e^{\omega t - ikz}$, tel que

$$\omega \xi = u_r(r_i^0) + ikv(r_i^0) \xi. \quad (8)$$

L'équation différentielle ordinaire (7)   résoudre est une équation d'ordre 4 sur u_r .

Les u_r sont cherchés sous la forme :

$$\begin{aligned} u_r^i &= \alpha_0^i f_0^i + \alpha_1^i f_1^i + \alpha_2^i f_2^i + \alpha_3^i f_3^i \\ u_r^e &= \alpha_0^e f_0^e + \alpha_1^e f_1^e + \alpha_2^e f_2^e + \alpha_3^e f_3^e \end{aligned} \quad (9)$$

tels que (f_0, f_1, f_2, f_3) forment une base de l'espace de solution de (7) avec respectivement $D^\alpha f_j^i(0) = \delta_{\alpha j}$ et $D^\alpha f_j^e(R_c) = \delta_{\alpha j}$. Les 4 conditions d'interface, obtenues après linéarisation et décomposition suivant les modes normaux,

$$\begin{aligned} u_r^e(r_i^0) &= u_r^i(r_i^0) \quad , \quad \partial_r u_r^e(r_i^0) &= u_r^i(r_i^0) + \frac{\xi \Delta P r_i^0}{2L} \left(\frac{1}{\eta^i} - \frac{1}{\eta^e} \right), \\ [\eta(-iku_r + \partial_r u_z)]_e^i &= 0 \quad , \quad [P - 2\eta \partial_r u_r]_e^i &= \gamma \xi \left(-k^2 + \frac{1}{(r_i^0)^2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

associ es aux 4 conditions de bord

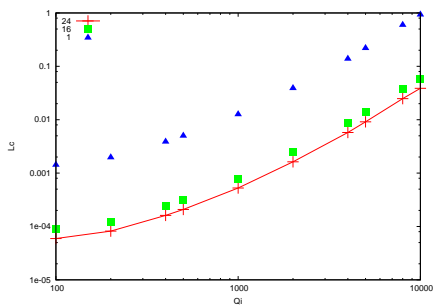
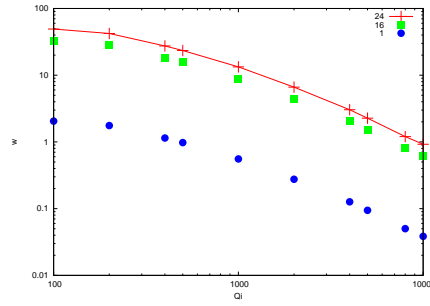
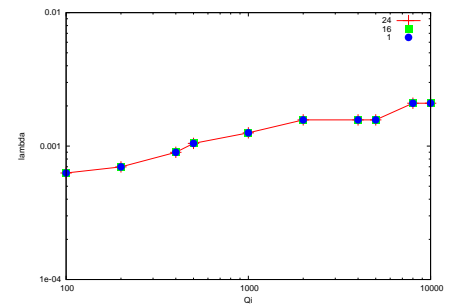
$$u_r^e(R_c) = 0, \partial_r u_r^e(R_c) = 0 \text{ et } u_r^i(0) = 0, \partial_r^2 u_r^i(0) = 0,$$

ferment le système. Nous résolvons numériquement (7) 8 fois afin de construire les 8 fonctions $(f_j^i)_{j=0..3}$, $(f_j^e)_{j=0..3}$ puis nous trouvons les coefficients $(\alpha_j^i)_{j=0..3}$, $(\alpha_j^e)_{j=0..3}$ en fonction de ξ en utilisant (9). Cela permet de déterminer $u_r(r_i^0)$ en fonction de ξ puis de trouver w grâce à (8). La résolution de (7) est effectuée avec une méthode d'intégration classique (Runge-Kutta). Nous présentons maintenant les résultats numériques obtenus en négligeant les termes d'inertie que nous avons conservés dans le calcul. Les paramètres de simulation de référence sont les mêmes que ceux utilisés dans la partie expérimentale (Fig.3), à savoir $\eta_i = 55 \text{ mPa.s}$, $\eta_e = 235 \text{ mPa.s}$, $\gamma = 24 \text{ mN/m}$ et $R_c = 275 \text{ } \mu\text{m}$ pour un microcanal de 5cm de long. Pour cette configuration de référence, nous fixons un de deux débits et regardons en fonction de l'autre l'évolution de la longueur critique $L_c = \frac{V_{fluide}}{w}$, de ω et de la longueur d'onde λ . Dans les graphiques, ce cas de référence sera associé aux tracés en traits pleins, les autres courbes correspondent aux résultats obtenus en faisant varier la viscosité ou la tension de surface.

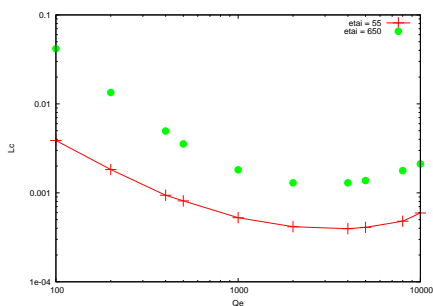
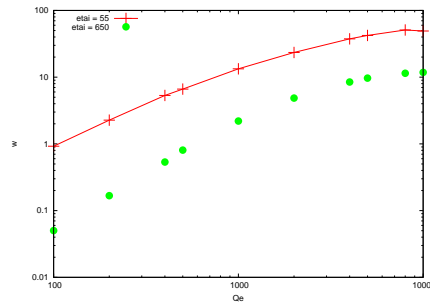
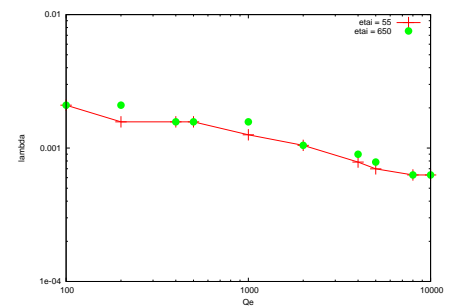
-Le débit externe est fixe : $1000 \mu\text{L/h}$ et l'interne varie. (Figures 5   7)

A débit externe fixe, une augmentation du débit interne engendre une augmentation de la zone de stabilité (L_c est de profil croissant (Fig.5)) : observation de jets. Aussi, une diminution de la tension de surface a pour conséquence une stabilisation plus précoce de l'écoulement : pour $\gamma = 1 \text{ mN/m}$, L_c est supérieure à la longueur critique obtenue pour 24 mN/m , ce qui montre que l'écoulement est stable sur une plus grande distance .

Il semble que la taille des gouttes ne soit pas affectée par une modification du coefficient de tension de surface.

FIG. 5 – L_c en mFIG. 6 – ω en s^{-1} FIG. 7 – λ en m

-Le débit interne est fixe : $1000\mu L/h$ et l'externe varie. (Figures 8 à 10) Expérimentalement pour les paramètres dit de référence, cette zone est instable quelque soit la valeur de Q_e (Fig. 3). Numériquement, nous retrouvons ce résultat car L_c est inférieure à la longueur du capillaire (5 cm). De plus, L_c est décroissante puis croissante pour des grandes valeurs de débit externe ce qui correspond aux jetting. Les valeurs numériques de λ (profil décroissant de la solution) montrent que les bouchons sont observables pour les petites valeurs du débit externe.

FIG. 8 – L_c en mFIG. 9 – ω en s^{-1} FIG. 10 – λ en m

4 Conclusions

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la stabilité de jets diphasiques dans des microcanaux cylindriques. Une analyse en perturbation linéaire permet de retrouver quantitativement les résultats expérimentaux. Nous observons les différents régimes. Aussi, l'étude paramétrique est en bon accord avec les résultats expérimentaux (Gui06) : l'augmentation de la viscosité interne, la diminution de la tension de surface et de forts débits internes ou externes favorisent le régime de jet. Il est possible d'étendre cette approche aux fluides non newtonien et de caractériser les différents régimes.

Références

- [Cha61] S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and hydromagnetic stability, 1961.
- [deG05] P.G.de Gennes. Gouttes, bulles, perles et ondes. Edition Belin, 2005.
- [G-C06] P. Guillot et A. Colin. Stability of jet in confined pressure-driven biphasic flows at low Reynolds number, 2006.
- [Gui06] P. Guillot. Thèse de Doctorat, Ecoulement de fluides immiscibles dans un canal submillimétrique : Stabilité et application à la rhéologie, 2006.
- [Lin98] S.P. Lin Ann. Rev. Fluid Mech, 1998.