Département
Licence

K1BE6W14 Biomodélisation
Mathématiques TP machine IV
Ph. Thieullen

Travaux pratiques IV
Modèles à temps continu pour une seule espèce

TP 1. L'objectif de cette partie est de montrer qu'un modèle continu $x' = f(x)$ peut ne pas admettre de solution en tout temps. On considère un modèle théorique déjà normalisé donné par

$$\frac{dx}{dt} = x' = x(1+x) - \frac{4x}{1+x}.$$

Remarquer que ce modèle, bien que proche en apparence d'un modèle logistique, est en fait très différent : le terme $x(1+x)$, comparativement au terme usuel $x(1-x)$, modifie complètement le comportement du système.

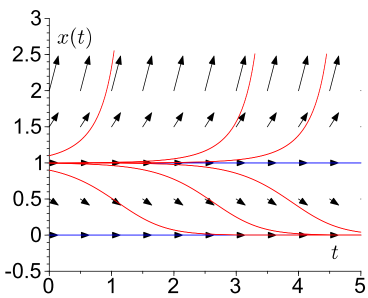

FIGURE 1 – Phénomène d'emballement du modèle $x' = x(1+x) - \frac{4x}{1+x}$

– Définissez une fonction `y = fauxLogistique(t,x)` représentant le modèle précédent (il faut conserver la variable `t` pour la suite même si elle n'est pas présente explicitement).

– On demande ensuite de tracer le *champ de vecteur*, c'est-à-dire la variation $\Delta x = f(x)\Delta t$ en tout point x. Plus généralement, pour un modèle non autonome $x' = f(t,x)$, on trace une flèche $(\Delta t, \Delta x)$ issue de chaque point (t,x). Pour cela échantillonnez $t \in [0,5]$, $x \in [0,2]$, puis construisez $\Delta t = 1$ de même longueur que t, puis Δx. Utilisez alors le code suivant en se référant à la documentation

```
[DELTA_T,DELTA_X] = ...
                meshgrid(delta_t,delta_x);
champ(t,x,DELTA_T',DELTA_X');
```

– Tracez quelques trajectoires $x(t)$ en fonction de t en utilisant le solveur

```
xt = ode("adams",x0,t0,tt,fauxLogistique)
```

sur un échantillonnage de temps `tt` dans $[0,5]$ pour différentes conditions initiales `x0` dans $[0,1]$ et `t0=0`. On constatera que $x_* = 0$ et $x_* = 1$ sont des états d'équilibre.

– Tracer maintenant des trajectoires de conditions initiales $x_0 > 1$. On constatera que la solution $x(t)$ *explose*, c'est-à-dire, tend vers $+\infty$ en temps fini. Le système s'emballe et devient incontrôlable. On devra trouver la figure 1.

TP 2. On considère un modèle sans dimension donné par

$$x' = rx\Big(1 - \frac{x^2}{2}\Big) - 5\Big(x - \frac{x^3}{6}\Big) = f_r(x).$$

On se propose de représenter sur un graphique la perte de stabilité du point d'équilibre $x_* = 0$ lorsque le paramètre r varie.

– Définissez une fonction `y = fourche(t,x)` représentant le modèle précédent.
– Tracez ensuite le graphe de $f_r(x)$ pour différentes valeurs de $r = 1,\ 5,\ 15$. on trouvera le dessin de gauche de la figure 2. On constate que, pour $r < 5$, $f'(0) < 0$ et 0 est stable et que, pour $r > 5$, $f'(0) > 0$ et 0 est instable.
– On s'intéresse à la bifuraction du système à la valeur $r = 5$. L'état d'équilibre $x_* = 0$ se dédouble en deux états stables $x_*^{\pm}$ de chaque côté de x_*. Pour visualiser ce comportement, on considère deux conditions initiales $x_0 = -0.1$ et $x_0 = 0.1$ pour différentes valeurs de r échantillonnées sur $[4, 6]$. On trace alors $x_r^{\pm}(T)$ en focntion de r pour une grande valeur de T (par exemple $T = 100$). On trouvera le dessin de droite de la figure 2.

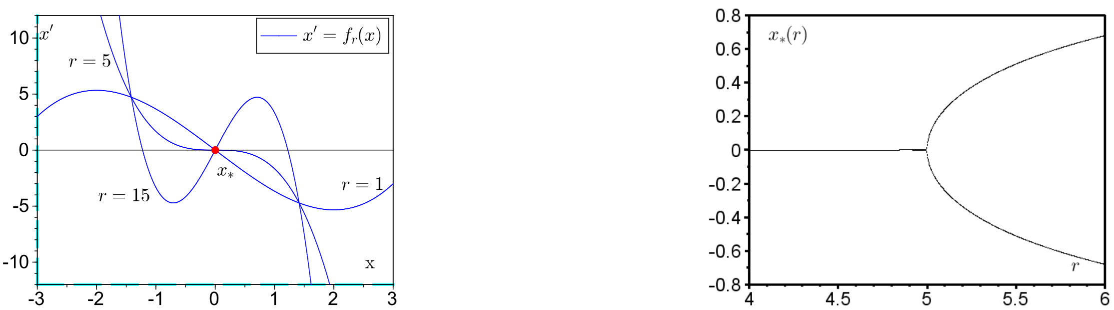

FIGURE 2 – Bifurcation de l'état stables de $x' = rx\Big(1 - \frac{x^2}{2}\Big) - 5\Big(x - \frac{x^3}{6}\Big)$

TP 3. on considère le modèl simplifié de pêche suivant

$$N' = \rho N\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) - P\Big[1 - \exp\Big(-\frac{N^2}{A^2}\Big)\Big], \quad A > 0, \quad H > 0.$$

Le deuxième terme mesure le nombre de prises journalières qui est supposé faible lorsque le cheptel de poissons est rare et borné par P pour des raisons de quota. On montre qu'on peut récrire cette équation sous une forme sans dimension :

$$\frac{dx}{d\tau} = rx\Big(1 - \frac{x}{q}\Big) - (1 - e^{-x^2}) := f_{q,r}(x).$$

On se propose de rechercher numériquement les états d'équilibre et de tracer le domaine de bifurcation (nombre d'états d'équilibre) dans les variables (q, r). On s'intéresse aussi à l'existence ou non d'un phénomène d'hystérésis ?

– Définissez une fonction `y = modelePeche(t,x)` représentant le modèle précédent.
– Représentez les 4 courbes $x' = f_{q,r}(x)$ pour différentes valeurs de $q = 8$ et de $r = 0.3$, $r = 0.5$, $r = 0.87$ et $r = 1$. On trouvera lle dessin de gauche de la figure 3.
– Représenter la surface $x' = f_{q,r}(x)$ en fonction de (x, r) pour des valeurs $x \in [0, 8]$ et $r \in [0, 1]$. On s'appuiera sur le code Scilab suivant

```
[r,x] = meshgrid(rr,xx);
x_prime = modelePeche(t,x);
f=gcf(); f.color_map = graycolormap(128);
//f=gcf(); f.color_map = bonecolormap(128);
surf(x,r,x_prime,'FaceColor','interp');
```

On trouvera le dessin de droite de la figure 3 et on pourra essayer différents modèles de couleur en consultant l'aide en ligne à `colormap`.

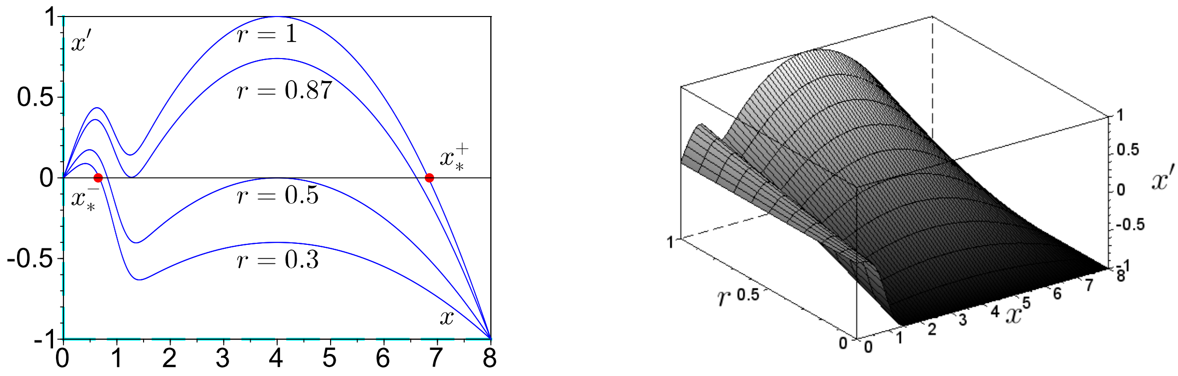

FIGURE 3 – Graphe de $x' = f_{q,r}(x)$ pour $q = 8$.

– On cherche à simuler un phénomène d'hystérésis. On suppose que $r = r(t)$ varie très lentement en fonction du temps pour des raisons externes au système. Pour simplifier, on considère une variation cyclique de la forme $r(t) = r_0 \cos(2\pi \frac{t}{T}) + r_1$ où T représente une période externe, décrivant par exemple un phénomène cyclique saisonnier. On prendra les valeurs

```
q = 8; r0 = 0.3; r1 = 0.7; x0 = 4; t0 = 0;
```

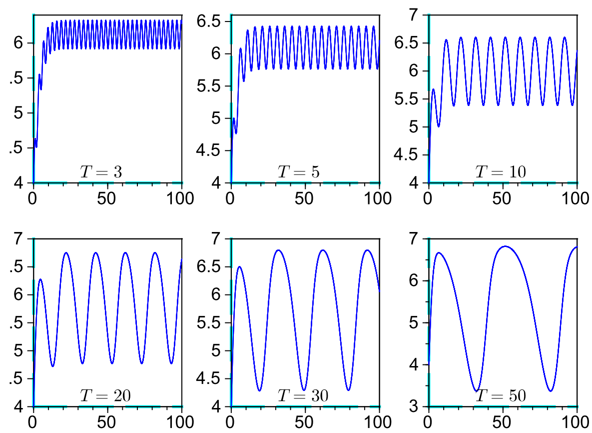

FIGURE 4 – Phénomène d'emballement du modèle $x' = x(1 + x) - \frac{4x}{1+x}$

N'oubliez pas de redéfinir la fonction `modelePeche` en incluant la dépendance en temps dans le paramètre r. Le choix de r_0 et de r_1 implique une oscillation de r entre les deux valeurs $[0.3, 1]$. On constate que, plus la prériode T est grande, plus la variation de r est lente, plus le système a le temps de stabiliser aux deux états d'équilibre extrèmes x_*^+ et x_*^- obtenus respectivement pour $r = 1$ et pour $r = 0.3$. Lorsque $t = 0$, $r = 1$ et $x_0 = 4$, le système évolue vers le point x_*^+. Lorsque t augmente, r décroit vers la valeur $r = 0.3$, et le système est alors attiré par le points x_*^-. Si la période d'oscillation de r est trop petite, le système n'a pas le temps d'atteindre x_*^- et reste bloqué près de x_*^+.