II Les théorèmes fondamentaux.

10. Notations. On cherche à donner des théorèmes d'existence et d'unicité de solution de l'équation différentielle ordinaire

$$x' = f(t,x) \qquad (\text{i.e. } x' = \frac{dx}{dt}).$$

On suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ est ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et que $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est mesurable vérifiant

1) $\forall t \quad x \mapsto f(t,x)$ est continue

2) $\forall (t_0,x_0) \in \Omega$, $\exists\, I\times U$ un voisinage ouvert de (t_0,x_0) tel que $t \mapsto \sup_{x\in U} f(t,x)$ est intégrable sur I

11. Théorème (Carathéodory)

Soit $(t_0,x_0)\in\Omega$, alors il existe $I\times U \subset \Omega$ voisinage de (t_0,x_0) et $\varphi : I \to U$ une fonction continue tels que

1) $t \mapsto \sup_{x\in U} f(t,x)$ est intégrable sur I

2) $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds$, $(\forall t\in I)$

12. Remarque 1) Une fonction continue $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ vérifiant

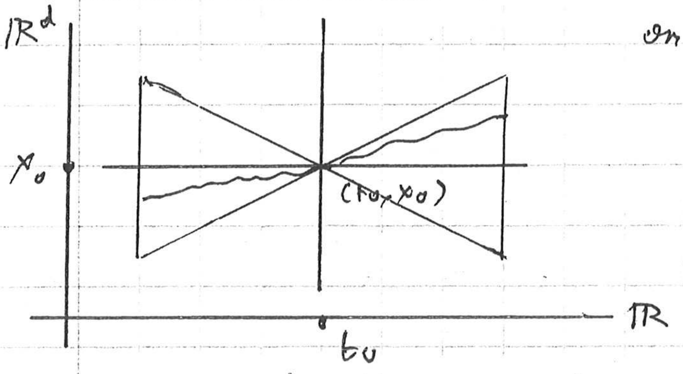
$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

où $g\in L^1(I)$ est appelée absolument continue : elle vérifie le résultat suivant (difficile à montrer qu'on admettra).

$$\varphi'(t) = g(t) \quad \text{Lebesgue p.p.}$$

* 2) (t_0,x_0) s'appelle la condition initial du problème de Cauchy

13. Preuve du théorème 11



La construction est semi constructive : on construit une solution approchée

$$\varphi_n : I \to U$$
$$\varphi_n = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))\,ds + \varepsilon_n$$
$$\varepsilon_n \to 0$$
$$\{\varphi_n\} \text{ équicontinue}$$

Il reste alors à extraire une sous suite convergeant uniformément et à passer la limite sous le signe $\int$.

On commence par choisir un domaine de sécurité

$$\left\{\begin{array}{l} I^* \times U^* \subset \Omega \quad \text{voisinage ouvert de } (t_0, x_0) \\ t \mapsto \sup_{x \in U^*} f(t,x) \text{ est intégrable sur } I^* \end{array}\right.$$

On note

$$R^* = \int_{I^*} \sup_{x \in U^*} \|f(t,x)\| \, dt$$

$$R(t) = \int_{t_0}^{t} \sup_{x \in U^*} \|f(s,x)\| \, ds$$

On utilisera le fait que $t \mapsto M(t)$ est continue sur I^*.

On choisit $I \times U = [t_0 - T ; t_0 + T] \times B(x_0, \rho) \subset I^* \times U^*$.

On cherche à construire des graphes $(t, \varphi_n(t))$ de pente contrôlée qui ne sorte pas de $I \times U$. On impose

$$R^* \leq \rho$$

Soit $n \geq 1$, un découpage de I en pas $\frac{T}{n}$ (on ne rédige que le cas $t \in [t_0, t_0 + T]$)

$$t_0 < t_0 + \frac{T}{n} < t_0 + \frac{2T}{n} < \dots < t_0 + T$$

On construit φ_n sur chaque segment en se servant des valeur de φ_n sur le segment précédent, soit

$$\varphi_n(t) = x_0, \qquad \forall\, t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{T}{n}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0 + T/n}^{t} f(s - T/n, \varphi_n(s - T/n))\, ds \\ \forall\, t_0 + \frac{T}{n} \leq t \leq t_0 + 2T/n \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_n(t) = \varphi_n(t_0 + \frac{2T}{n}) + \int_{t_0 + 2T/n}^{t} f(s - \frac{T}{n}, \varphi_n(s - \frac{T}{n}))\, ds \\ \forall\, t_0 + 2T/n \leq t \leq t_0 + 3T/n \end{array}\right.$$

Il faut d'abord montrer que φ_n est bien définie à chaque étape, i.e. $\forall t \in I \quad \varphi_n(t) \in B(x_0, \rho)$. On montre en fait par recurrence que

$$\|\varphi_n(t) - x_0\| \leq R(t) \qquad \forall\, t \in I$$

En effet, sur $[t_0 + \frac{kT}{n}, t_0 + \frac{(k+1)T}{n}]$, en se servant de l'hypothèse de recurrence, $R(t) \leq R^* \leq \rho$) sur $[t_0 + \frac{k-1}{n}T, t_0 + \frac{kT}{n}]$

$$\begin{aligned} &\|\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0 + \tfrac{kT}{n})\| \\ &\quad \leq \int_{t_0 + kT/n}^{t} \sup_{x \in U^*} \|f(s,x)\|\, ds \\ &\quad = R(t) - R(t_0 + \tfrac{kT}{n}) \end{aligned}$$

$$\|\varphi_n(t) - x_0\| \leq R(t)$$

On montre maintenant que φ_n est equicontinue : si $\frac{k\tau}{n} \leq t_1 < t_2 \leq \frac{(k+1)\tau}{n}$

$$\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s - \tfrac{T}{n}, \varphi_n(s - \tfrac{T}{n}))\, ds$$

$$\|\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \sup_{x \in O^*} \|f(s - \tfrac{T}{n}, x)\|\, ds$$

$$= R(t_2 - T/n) - R(t_1 - T/n)$$

D'après le théorème d'Ascoli, les fonctions $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ sont équicontinues, uniformement bornées : on en extrait une sous suite uniformement convergente. On a

$$\varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0 + \frac{T}{n}}^{t} f(s - \tfrac{T}{n}, \varphi_n(s - \tfrac{T}{n}))\, ds$$

$$\forall t > T/n.$$

En utilisant le fait que à t fixé $x \mapsto f(t,x)$ est continue, et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a pour une sous suite de n :

$$\varphi_n(t) \to \varphi(t) \text{ uniformement}$$

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leq \rho \quad \forall t \in I$$

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$$

(en fait on utilise l'estimée

$$\left\|\int_{t - \tau/n}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds\right\| \leq R(t) - R(t - T/n)$$

$$\to 0 \text{ uniformement sur } I)$$

14. <u>Remarque</u> 1) Même en supposant la continuité de $f(t,x)$, la solution n'est pas unique

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$$

admet 2 solutions passant par $t_0 = 0$ qui sont lisses

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \forall t \in \mathbb{R} \\ x(t) = t^2 & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2) L'intégration d'une équation est un processus régularisant si $f(t,x)$ est continue, alors

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

est C^1 sur son intervalle d'existence.

15. Theorème (Unicité ~~...~~) Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ une application lipschitzienne en x uniformément en t, de constante k ; *

$$\begin{cases} \| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| \leq k \|x_1 - x_2\| \\ \forall (t,x_1), (t,x_2) \in \Omega \end{cases}$$

Soit φ_1, φ_2 des fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\varphi_i : I \to U$ telles que, pour certaines constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$

$$\begin{cases} I \times U \subset \Omega, \quad t_0 \in I \\ \| \varphi_i'(t) - f(t, \varphi_i(t)) \| \leq \varepsilon_i \qquad \forall t \in I_\varphi \\ \| \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) \| \leq \delta \end{cases}$$

Alors

$$\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{k}\left[e^{k|t-t_0|} - 1\right]$$

**

** En particulier, si φ_1 et φ_2 sont 2 (vraies) solutions avec même conditions initiales, alors $\varphi_1 = \varphi_2$ sur l'intersection de leur domaine de définition

* On peut aussi prendre comme (H). $t \mapsto \sup_{x \in U} \| f(t,x) \|$ est intégrable sur H

preuve En intégrant $\varphi_i'(t) - f(t, \varphi_i(t))$ sur $[t_0, t]$ (ici on ne traite que le cas $t > t_0$) on a

$$\| \varphi_i(t) - \varphi_i(t_0) - \int_{t_0}^t f(s, \varphi_i(s))\, ds \| \leq \varepsilon_i [t - t_0]$$

Puis en prenant la différence de ces expressions :

$$\| [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] - [\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)] - \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))]\, ds \| \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)[t - t_0]$$

Puis en utilisant que f est k-lipschitzienne

$$\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \leq \delta + k \int_{t_0}^t \| \varphi_1(s) - \varphi_2(s) \| ds + \varepsilon [t - t_0]$$

(avec $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$) On pose

$$\begin{cases} r(t) = \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| & \text{continue sur } I \\ R(t) = \int_{t_0}^t r(s)\, ds & \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \end{cases}$$

On obtient

$$R'(t) \leq \delta + k R(t) + \varepsilon (t - t_0)$$

$$[R'(t) - k R(t)]\, e^{-k(t-t_0)} \leq [\delta + \varepsilon (t - t_0)]\, e^{-k(t-t_0)}$$

En prenant une primitive de chaque côté ($R(t_0) = 0$)

$$R(t)\, e^{-k(t-t_0)} \leq \left[\frac{\delta + \varepsilon(t-t_0)}{-k} e^{-k(t-t_0)}\right]_{t_0}^t + \frac{\varepsilon}{k}\int_{t_0}^t e^{-k(t-t_0)}\, dt$$

$$R(t) \leq \frac{\delta + \varepsilon(t-t_0)}{-k} + \frac{\delta}{k} e^{k(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{k^2}\left[e^{k(t-t_0)} - 1\right]$$

$$\begin{aligned} r(t) &\leq \delta + k R(t) + \varepsilon(t-t_0) \\ &\leq \delta e^{k(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{k}\left[e^{k(t-t_0)} - 1\right]. \end{aligned}$$ ■

16. Remarque 1) Une fonction $\varphi(t)$, C^1 par morceaux, vérifiant

$$\begin{cases} \|\varphi'(t) - f(t,\varphi(t))\| \leq \varepsilon \\ \text{en tout point de } I \text{, sauf aux points où } \varphi'(t) \text{ n'est calculé pas} \end{cases}$$

est dite solution ε-approchée. Le théorème précédent donne une estimation de l'écart entre la vraie solution et une solution approchée.

2) Le théorème d'existence de Carathéodory est semi constructif. Dans le cas Lipschitzien, le théorème suivant est explicite et donne l'erreur de la solution approchée.

17. Théorème (Picard) (ou méthode des approximations successives)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$; $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ k-lipschitzienne* en x uniformément en t. Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$, $I = [t_0 - T, t_0 + T]$, $U = B(x_0, \rho)$. On note $M = \sup_{I\times U} \|f\|$ et on suppose que

$$T M \leq \rho \qquad (**)$$

On considère le schéma d'itération.

$$\varphi_0(t) = x_0, \qquad (\forall t \in I)$$

$$\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\, ds, \qquad (\forall t \in I)$$

Alors $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une (unique) solution C^1, $\varphi(t)$, définie sur I à valeurs dans U et vérifiant

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)), \qquad \forall t \in I \end{cases}$$

De plus

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{M}{k} \frac{(kT)^n}{n!} \left(e^{kT} - 1\right).$$

* mettre plutôt k-Lipschitzien sur $I \times U$ au lieu de Ω

** Remplacer par $t \mapsto \sup_{x\in U} \|f(t,x)\|$ intégrable sur I et $R^* := \int_I \sup_{x\in U} \|f(t,x)\|\, dt \leq \rho$

preuve • On montre d'abord par recurrence que $\varphi_n \in U$ et plus précisément $\| \varphi_n(t) - x_0 \| \leq (t - t_0) M$, $\forall t \in I$.
En effet, (là encore on suppose $t > t_0$)

$$\| \varphi_{n+1}(t) - x_0 \| \leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, \varphi_n(s)) \| ds$$
$$\leq (t - t_0) M \qquad (\text{car } \varphi_n \in U)$$

et donc $\| \varphi_{n+1} - x_0 \| \leq \tau M \leq \rho$: $\varphi_{n+1} \in U$.

• On calcule ensuite la norme uniforme de $\varphi_{n+1} - \varphi_n$

$$\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi_n(s)) - f(s, \varphi_{n-1}(s))] ds$$
$$\| \varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t) \| \leq k \int_{t_0}^{t} \| \varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s) \| ds$$

Par recurrence, on a, $\| \varphi_1(t) - \varphi_0(t) \| \leq M (t - t_0)$.

$$\| \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) \| \leq \frac{M}{k} \frac{(t-t_0)^n}{n!} k^n$$

$$\sum_{n \geq 1} \| \varphi_n - \varphi_{n-1} \|_\infty \leq \frac{M}{k} \sum_{n \geq 1} \frac{(k\tau)^n}{n!} = \frac{M}{k} (e^{k\tau} - 1)$$

La série converge donc uniformément. Soit φ la limite des φ_n :

$$\varphi = \Sigma_{n \geq 1} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \varphi_0$$

on a bien

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds$$
$$\iff \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = x_0$$

De plus, l'erreur entre φ_n et φ est donnée par

$$\varphi - \varphi_n = \Sigma_{i \geq n+1} (\varphi_i - \varphi_{i-1})$$
$$\| \varphi - \varphi_n \|_\infty \leq \Sigma_{i \geq n+1} \frac{M}{k} \frac{(k\tau)^i}{i!}$$

$$\leq \Sigma_{i \geq 1} \frac{M}{k} \frac{(k\tau)^i}{i!} \qquad \frac{(k\tau)^n}{n!}$$

(on a utilisé que

$$(i+n)! = n! (n+1) \cdots (n+i) \geq n! \, i!)$$

D'où $\quad \| \varphi - \varphi_n \|_\infty \leq \frac{M}{k} \frac{(k\tau)^n}{n!} (e^{k\tau} - 1)$.

Il est difficile de connaître a priori le domaine de définition de la solution. Il en existe cependant une qui est dite maximale et qui est "la plus grande".

18. <u>Définition et Théorème</u> Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue localement lipschitzienne en x

$$\begin{cases} \forall (t_0, x_0)\ \exists\ I\times U \text{ ouvert de } \Omega \text{ contenant } (t_0, x_0) \text{ telque} \\ \exists\ k>0,\ \forall t\in I\ \forall x, x' \in U \quad \|f(t,x)-f(t,x')\| \leq k \|x-x'\| \end{cases}$$

Alors pour tout (t_0, x_0), il existe une unique solution maximale $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ passant par (t_0, x_0) :

1) I ouvert, $\forall t\in I$, $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, φ est C^1
$\varphi(t_0) = x_0$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, $\forall t\in I$

2) Si $\psi : J \to \mathbb{R}^d$ est une autre solution vérifiant les conditions précédentes sur J, alors

$J \subset I$ et $\forall t\in J$ $\varphi(t) = \psi(t)$.

<u>preuve</u> • On montre d'abord que si $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ et $\psi : J \to \mathbb{R}^d$ sont 2 telles solutions passant par (t_0, x_0) mais pas forcément maximales, alors $\varphi = \psi$ sur $I\cap J$. En effet $\{t\in I\cap J : \varphi(t) = \psi(t)\}$ est fermé dans $I\cap J$ et ouvert d'après 15 : c'est donc $I\cap J$ par connexité.

• L'intervalle maximal I_{max} est la réunion de tous les I telsque $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ est une solution passant par (t_0, x_0); et $\varphi_{max} = \varphi$ sur I indépendamment de (I, φ). ■

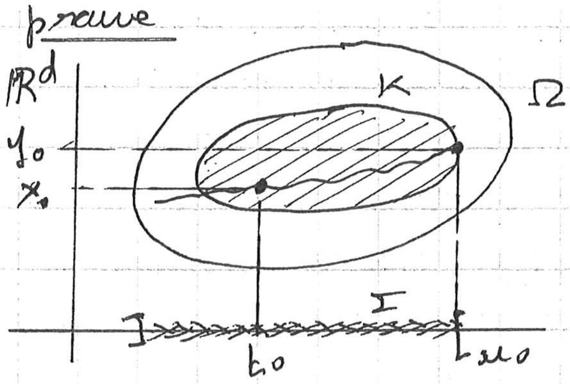
19. <u>Proposition</u> (mêmes hypothèses que 18) Soit $K \subset \Omega$ un compact, $(t_0, x_0) \in K$, et $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ la solution maximale passant par (t_0, x_0). Alors il existe $J \subset I$ compact telque $\varphi(I\setminus J) \subset \Omega\setminus K$. (La* solution sort de tout compact pour un temps t suffisamment loin de la donnée initiale t_0).

* c'est plutôt le graphe de la solution

(cette proposition n'a d'intérêt que si un des bords de l'intervalle maximal est fini)

* u_0 est fini et nécessairement c'est le bord droit de I

<u>preuve</u>



Par l'absurde, il existe $K \subset \Omega$ compact, il existe une suite t_n tendant vers le bord de I tel que $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$. On peut supposer $t_n \uparrow u_0$ * (sinon on traite l'autre cas). On peut aussi supposer $\varphi(t_n) \to y_0$. On introduit un domaine de sécurité $J \times V$, $J = [u_0-\tau, u_0+\tau]$, $V = B(y_0, \rho)$, tel que

1) $J \times V \subset \Omega$, $M := \sup_{J\times V} \|f\| < +\infty$, $\tau M \leq \rho$

2) $f(t,\cdot)$ est Lipschitz de constante k sur $J \times V$

En particulier, on dispose d'une solution $\psi : J \to V$ passant par (u_0, y_0). On montre que φ préserve aussi le domaine de sécurité sur $]u_0-\tau, u_0[$:

$$\forall t \in [u_0-\tau, u_0[, \quad \varphi(t) \in B(y_0, \rho)$$

En effet soit $t_n \to u_0$ tel que $\varphi(t_n)$ soit proche de y_0

$\mathring{B}$ = intérieur de B

tant que $\varphi(]t, t_n[) \subset \mathring{B}(y_0, \rho)$ on a

$$\|\varphi(t_n) - \varphi(t)\| \leq \int_t^{t_n} \|f(s, \varphi(s))\| ds$$
$$\leq (t_n - t) M < \tau M \leq \rho$$

c'est-à-dire on a $\varphi(]t, t_n[) \subset B(y_0, \tau M)$.

L'ensemble $\{ t \in [u_0-\tau, t_n[\; : \; \varphi(]t, t_n[) \subset B(y_0, \rho) \}$ est à la fois ouvert et fermé donc égal à $[u_0-\tau, t_n[$.

On dispose de 2 solutions sur $[u_0-\tau, u_0[$ à valeurs dans V et d'après 15

$$\begin{cases} \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \|\varphi(t_n) - \psi(t_n)\| e^{k|t_n - t|} \\ \forall t \in [u_0-\tau, u_0[\text{ et } t_n \text{ suffisamment proche de } u_0 \end{cases}$$

D'où $\varphi = \psi$ sur $[u_0-\tau, u_0[$ et $\tilde{I} = I \cup J$,

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi \text{ sur } I \\ \tilde{\varphi} = \psi \text{ sur } J \end{cases}$$

$\tilde{\varphi} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$ est encore une solution prolongeant $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ contredisant la maximalité de φ. ∎

20 <u>Exemple fondamental</u> Si $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est continue localement Lipschitzienne. Soit $J \subset I$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}^d$ une solution maximal passant par (t_0, x_0)

1) ou bien $[t_0, +\infty[\subset J \subset I$

2) ou bien $u_0 = \sup J < +\infty$ et $\lim_{t \to u_0^-} \|\varphi(t)\| = +\infty$

Nous avons déjà vu en 15 un théorème de comparaison de solutions. Nous allons donner quelques compléments, permettant ainsi de mieux contrôler le temps de vie.

21 <u>Lemme de Gronwall</u> Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (numérique) continue localement Lipschitzienne. Soit $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale passant par t_0 qu'on suppose définie sur I tout entier. Soit $x : I \to \mathbb{R}^d$ une fonction C^1 vérifiant

$$\begin{cases} \|x(t_0)\| \leq \varphi_0 \\ \|x'(t)\| \leq f(t, \|x(t)\|) \quad \forall t \in I \cap [t_0, +\infty[\end{cases}$$

Alors $\|x(t)\| \leq \varphi(t)$, $\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[$

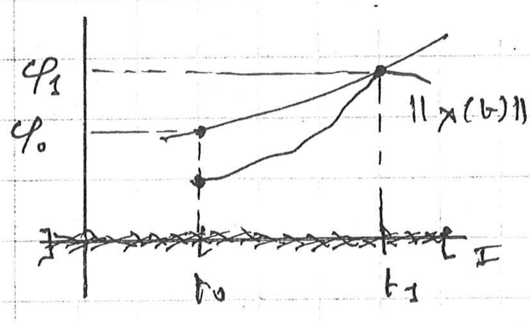
<u>Preuve</u> • On suppose d'abord que $\|x'(t)\| < f(t, \|x(t)\|)$ est une inégalité stricte sur $I \cap [t_0, +\infty[$. Soit $J = \{ t \in I \cap [t_0, +\infty[\; : \; \|x(s)\| \leq \varphi(s) \;\; \forall t_0 \leq s \leq t \}$ et supposons par l'absurde que $\sup(J) < \sup(I)$.

Soit $t_1 = \sup J$.

Alors définition de t_1 :

$\|x(t_1)\| = \varphi(t_1)$.

Pour $t > t_1$, proche de t_1,



$$\begin{aligned} \varphi_1(t) - \|x(t)\| &= [\varphi_1(t) - \varphi_1(t_1)] - [\|x(t)\| - \|x(t_1)\|] \\ &\geq [\varphi_1(t) - \varphi_1(t_1)] - \|x(t) - x(t_1)\| \\ &\geq [\varphi_1'(t_1) - \|x'(t_1)\|](t - t_1) + o(t - t_1) \end{aligned}$$

et donc $\varphi(t) > \|x(t)\|$ et cela contredit la maximalité de t_1. Donc $\sup(J) \geq \sup(I)$.

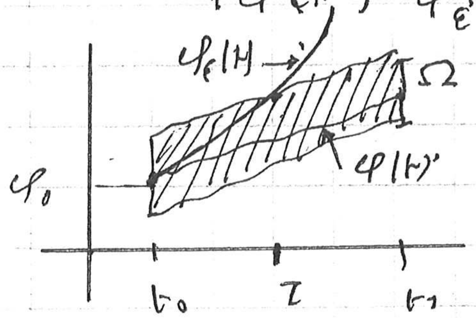
$$\|x(t)\| \leq \varphi(t) \qquad \forall\, t \in I \cap [t_0, +\infty[$$

- Pour le cas générale, on se ramène au cas précédent en montrant que pour tout $[t_0, t_1] \subset I$, $t_1 > t_0$, $\delta > 0$ on peut trouver $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon'(t) = f(t, \varphi_\varepsilon(t)) + \varepsilon \\ \varphi_\varepsilon(t_0) = \varphi_0 \end{cases}$$

soit définie sur $[t_0, t_1]$ tout entier et

$$|\varphi(t) - \varphi_\varepsilon(t)| \leq \delta, \qquad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$



On considère le tube de sécurité

$$\Omega = \{(t,x) \in]t_0, t_1[\times \mathbb{R} : \varphi(t) - \delta < x < \varphi(t) + \delta\}$$

On note k une constante de Lipschitz (en x) uniforme sur Ω. On choit ε petit pour que

$$\frac{\varepsilon}{k}\left[e^{k(t_1 - t_0)} - 1\right] < \delta$$

Soit $\varphi_\varepsilon : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale $(J \subset I)$ et supposons (par l'absurde) que $\sup J < t_1$.

$$|\varphi_\varepsilon(t)| \to +\infty \quad \text{lorsque } t \to \sup J.$$

on peut trouver $\tau \in]t_0, t_1[$ tel que

$$\begin{cases} |\varphi_\varepsilon(t) - \varphi(t)| \leq \delta & \forall\, t \in [t_0, \tau] \\ |\varphi_\varepsilon(\tau) - \varphi(\tau)| = \delta \end{cases}$$

En appliquant 15 on a (φ_ε est ε approchée pour f)

$$\begin{cases} |\varphi_\varepsilon(t) - \varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{k}\left[e^{k(t - t_0)} - 1\right] \\ \forall\, t \in [t_0, \tau] \end{cases}$$

et on arrive à une contradiction car

$$\frac{\varepsilon}{k}\left[e^{k(\tau - t_0)} - 1\right] < \delta.$$

On vient donc de montrer que $t_1 \leq \sup(J)$, φ_ε est au moins définie sur $[t_0, t_1]$ et on utilisant

à nouveau 15, $|\varphi(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\leq\delta$ pour tout $t\in[t_0,t_1]$
(La première partie entraîne $\|x(t)\|\leq\varphi_\varepsilon(t)\leq\varphi(t)+\delta$ sur $I\cap[t_0,+\infty[$ et pour tout δ)

22. Remarque. En conservant les hypothèses du 21 sur f.
Si $\varphi(t)$ est solution de
$$\varphi(t_0)=\varphi_0 \quad\text{et}\quad \varphi'(t)=-f(t,\varphi(t))$$
Si $x(t)$ est défini sur I et vérifie
$$\|x(t_0)\|\leq\varphi_0 \quad\text{et}\quad \|x'(t)\|\leq f(t,\|x(t)\|)$$
Alors
$$\|x(t)\|\leq\varphi(t),\qquad\forall t\in\,]-\infty,t_0]\cap I$$
(on pose en effet : $\tilde{x}(t)=x(t_0-t)$ sur $\tilde{I}=t_0-I$, $\tilde{f}(t,x)=f(t_0-t,x)$

23. Corollaire Si $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue localement Lipschitzienne et si, pour des constantes $A>0$, $B\in\mathbb{R}$,
$$|f(t,x)|\leq A|x|+B \qquad \forall t,x\in I\times\mathbb{R}.$$
*maximale

Alors les solutions* de l'équation $x'=f(t,x)$ sont définies sur I tout entier et de plus
$$\left.\begin{array}{l}\|x(t)\|\leq\|x(t_0)\|\,e^{A|t-t_0|}+\dfrac{B}{A}\left[e^{A|t-t_0|}-1\right]\\ \forall t\in I\end{array}\right\}$$

Corollaire Soit $u(t): I\to\mathbb{R}^+$, continue vérifiant $\forall t\in I$, $u(t)\leq B+A\left|\int_{t_0}^t u(s)\,ds\right|$. Alors $u(t)\leq B\exp(A|t-t_0|)$, $\forall t\in I$

Preuve La solution de $\varphi'=A\varphi+B$, $\varphi(t_0)=\|x(t_0)\|$ est
$$\varphi(t)=\|x(t_0)\|\,e^{A(t-t_0)}+\frac{B}{A}\left[e^{A(t-t_0)}-1\right]$$
De même la solution de $\varphi'=-A\varphi-B$ est
$$\varphi(t)=\|x(t_0)\|\,e^{-A(t-t_0)}+\frac{B}{A}\left[e^{-A(t-t_0)}-1\right]$$
Si $x'=f(t,x)$ est une solution maximale, alors
$$\|x(t)\|\leq\|x(t_0)\|\,e^{A|t-t_0|}+\frac{B}{A}\left[e^{A|t-t_0|}-1\right]$$
En particulier $x(t)$ n'admet pas d'explosion et donc l'intervalle maximale est nécessairement I tout entier ∎

24. Corollaire Si $A: I\to\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ est une matrice dépendant continument de t et $B(t): I\to\mathbb{R}^n$ est un vecteur colonne continu sur I. La solution maximale
$$X'=AX+B \qquad X(t_0)=X_0$$
est définie sur I tout entier

25. **Théorème** (dépendance continue par rapport aux conditions initiales)

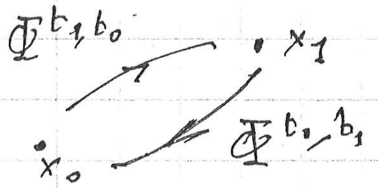
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue localement Lipschitzienne. Pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \Omega$, on note $\Phi(t, t_0, x_0)$, la solution maximale définie sur l'intervalle $I_{max}(t_0, x_0)$. On note

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{(t_0, x_0) \in \Omega} I_{max}(t_0, x_0) \times \{t_0\} \times \{x_0\}$$

Alors

1) $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$
$\{ \Phi : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ est continue

2) On change de notation en posant : $\Phi^{t, t_0}(x_0) = \Phi(t, t_0, x_0)$.
Soit $(t_1, t_0, x_0) \in \tilde{\Omega}$ et $x_1 = \Phi^{t_1, t_0}(x_0)$. Alors



si U_0 est un voisinage ouvert de x_0 suffisamment petit, on a
$U_1 = \Phi^{t_1, t_0}(U_0)$ est un ouvert
$\Phi^{t_1 t_0} : U_0 \to U_1$ est un homéomorphisme d'inverse $\Phi^{t_0 t_1}$:

$$\Phi^{t_0 t_1} \circ \Phi^{t_1 t_0}(x) = x \quad \forall x \in U_0.$$

preuve 2) est une conséquence de 1). Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ est la solution maximale passant par (t_0, x_0) et $t_1 \in I$, alors x est aussi la solution maximale passant par $(t_1, x_1 = x(t_1))$. En particulier si

$$\Phi^{t_1, t_0}(x_0) = \Phi^{t_1, t_0}(x'_0) = x_1$$

nécessairement, par unicité de la solution maximale $x_0 = x'_0$ et Φ^{t_1, t_0} est injective. On choisit U_0 tq

$$[t_0, t_1] \times \{t_0\} \times U_0 \subset \tilde{\Omega}$$

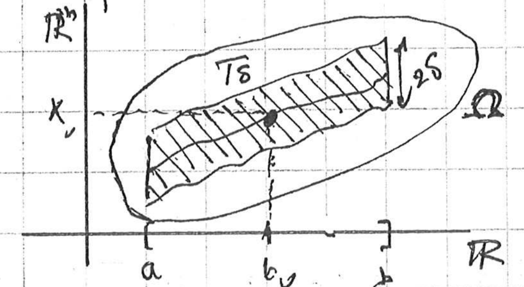
et $U_1 = \Phi^{t_1, t_0}(U_0)$, $x_1 = \Phi^{t_1 t_0}(x_0)$. Comme

$$[t_0, t_1] \times \{t_1\} \times \{x_1\} \subset \tilde{\Omega}$$

pour tout x'_1, proche de x_1, $\Phi(t, t_1, x'_1)$ est définie sur $[t_0, t_1]$ tout entier et par continuité

$$x'_0 = \Phi^{t_0 t_1}(x'_1)$$
est proche de x_0 : en particulier $x'_0 \in U_0$ et
$$\Phi^{t_1 t_0}(\Phi^{t_0 t_1}(x'_1)) = x'_1$$
On vient de montrer que U_1 est voisinage de x' et donc un ouvert en faisant varier $x_1 \in U_1$.

1) Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$ et on suppose que $\Phi(t, t_0, x_0)$ est définie sur $[a, b]$. On introduit un tube de sécurité



$T_\delta = \{ (t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n : \| x - \varphi(t) \| \leq \delta$
où $\varphi(t) = \Phi(t, t_0, x_0)$
On choisit δ petit de sorte que
$$T_\delta \subset \Omega$$
Soit k une constante de Lipschitz de $f(t, \cdot)$ sur T_δ uniformément en $t \in [a, b]$. On montre d'abord que, pour ε suffisamment petit, pour tout $(t'_0, x'_0) \in T_\varepsilon$, $\Phi(t, t'_0, x_0)$ est définie sur $[a, b]$ tout entier. On aura alors montré que $\tilde{\Omega}$ est ouvert. Soit $\psi(t) = \Phi(t, t'_0, x'_0)$ définie $J := I_{max}(t'_0, x'_0)$ sur $J \cap [a, b]$, φ et ψ sont 2 solutions de $x' = f(t, x)$ vérifiant $\| \varphi(t'_0) - \psi(t'_0) \| < \varepsilon$, d'où (d'après 15)
$$\| \varphi(t) - \psi(t) \| \leq \varepsilon \exp[k(b-a)]$$
On choisit donc ε tel que $\varepsilon \exp[k(b-a)] < \delta$ qui assure que $\psi(t) \in T_\delta$ tant que $t \in J \cap [a, b]$ et que $\psi(t)$ ne peut aller à l'∞ sur $[a, b]$*, d'où $J \supset [a, b]$.

On montre maintenant que $\Phi(t, t'_0, x'_0)$ est continue sur $[a, b] \times T_\varepsilon$. Comme dans le théorème de Picard, on construit par récurrence
$$\Phi_0(t, t'_0, x'_0) = x'_0 + \varphi(t) - \varphi(t'_0)$$
$$\Phi_{n+1}(t, t'_0, x'_0) = x'_0 + \int_{t'_0}^{t} f(s, \Phi_n(s, t'_0, x'_0))\, ds$$
et on montre que $(t, \Phi_n(t, t'_0, x'_0)) \in T_\delta$, $\forall t \in [a, b]$.
En effet, c'est vrai pour (t, Φ_0), et si $\Phi_n(t) = \Phi_n(t, t'_0, x'_0)$

* Le compact est $K = \overline{T_\delta}$ et il existe un $[a', b'] \subset J \cap [a, b]$ tel que $\psi(J \cap [a', b']) \subset \Omega \setminus K$

$$\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t) = \int_{t'_0}^{t} f(s, \Phi_n(s))\,ds - \int_{t'_0}^{t} f(s, \Phi_{n-1}(s))\,ds$$

$$\begin{cases} \|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leq k \left| \int_{t'_0}^{t} \|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\|\,ds \right| \\ \|\Phi_1(t) - \Phi_0(t)\| \leq k \left| \int_{t'_0}^{t} \|\Phi_0(s) - \varphi(s)\|\,ds \right| \end{cases}$$

Comme $\|\Phi_0(s) - \varphi(s)\| = \|x'_0 - \varphi(t'_0)\|$, par récurrence, on a

$$\|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\| \leq \frac{k^{n+1}|t-t'_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|x'_0 - \varphi(t'_0)\|$$

puis en sommant

$$\Phi_{n+1}(t) - \varphi(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \Phi_i(t) - \Phi_{i-1}(t) + \Phi_0(t) - \varphi(t)$$

on obtient

$$\|\Phi_{n+1}(t) - \varphi(t)\| \leq \|x'_0 - \varphi(t'_0)\| \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(k(b-a))^i}{i!}$$

$$\leq \varepsilon \exp[k(b-a)] < \delta$$

et donc $(t, \Phi_{n+1}(t)) \in T_\delta$, $\forall t \in [a,b]$. Maintenant $\Phi(t, t'_0, x'_0)$ est obtenu comme limite uniforme de fonctions continues $\Phi_n(t, t'_0, x'_0)$: Φ est donc aussi continue. ∎

2.6. Remarque

On cherche maintenant à montrer que la solution $\Phi(t, \tau, x)$ est de classe C^1 (et de classe C^2 par rapport à t) si on suppose de plus que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe et que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue. Ici (τ, x) désigne la C.I.

Supposons d'abord que Φ est lisse. Comme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \tau, x) = f(t, \Phi(t, \tau, x))$$

En dérivant par rapport à x et en notant

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \text{la matrice } \left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$$

on a en permuttant $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,\tau,x)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \Phi(t,\tau,x))\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,\tau,x)$$

D'où en notant pour (τ, x) fixé,

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \Phi(t,\tau,x)) \\[2ex] M(t) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(t,\tau,x) \end{cases}$$

M est solution de l'équation linéaire

$$M' = A(t)M,$$

(où AM désigne le produit de matrices) avec comme conditions initiale

$$\Phi(\tau,\tau,x) = x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\tau,\tau,x) = Id \quad : \quad M(\tau) = Id$$

En particulier, cette équation admet une solution maximale définie sur $I_{max}(\tau, x)$. On aurait pu aussi dériver par rapport à τ :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \Phi)\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$$

La condition initiale est cette fois-ci différente :

$$\Phi(\tau,\tau,x) = x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\tau,\tau,x) + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau,\tau,x) = 0$$

D'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(\tau,\tau,x) = -f(\tau,x).$$

27. <u>Théorème</u> On suppose que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et que $\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ est continue. Alors $\Phi(t,\tau,x) : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à t à (τ,x) fixé)

*

<u>preuve</u> On va montrer uniquement que $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ existe et est continue. On ferait de même pour $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$. (On sait déjà que $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ existe et est continue.)

*xxxxxxx Soit $(\tau, x) \in \Omega$ fixé, $\varphi(t) = \Phi(t,\tau,x)$ et $\Sigma(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,\tau,x)$, alors d'une part $\varphi' = f(t,\varphi)$, $\varphi(\tau) = x$, d'autre part $\Sigma' = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi)\Sigma$, $\Sigma(\tau) = Id$