VI bis Compléments : équations différentielles linéaires à coefficients périodiques

On s'intéresse ici aux équations de la forme

$$X' = A(t)X$$

où A est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique

$$A(t+T) = A(t).$$

A peut être à valeur réelle ou complexe.

38. **Théorème de Floquet** Soit $\Phi(t,\tau)$ la solution fondamentale. Alors Φ peut se mettre sous la forme

$$\Phi(t,\tau) = P(t)\, e^{(t-\tau)B} \quad P(\tau) = Id,\ B \text{ const}$$

avec ou bien $P(t)$ et B complexes . T-périodique.

$$P(t+T) = P(t) \quad , \quad \Phi(\tau+T,\tau) = e^{TB}$$

ou bien $P(t)$ et B réelles 2T périodique

$$P(t+2T) = P(t), \quad \Phi(\tau+2T,\tau) = e^{2TB}$$

preuve Pour simplifier les notations, on prend :

$$\Phi(t) := \Phi(t, t_0)$$

Alors $\quad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ et $\Phi(t_0) = Id$

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t+T)] = A(t+T)\,\Phi(t+T)$$

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t+T)\,\Phi(t_0+T)^{-1}] = A(t)\,[\Phi(t+T)\,\Phi(t_0+T)^{-1}]$$

$\Psi(t) := \Phi(t+T)\,\Phi(t_0+T)^{-1}$ et $\Phi(t)$ vérifie la même équation différentielle et la même condition initiale

d'où $\quad * \quad \Phi(t+T) = \Phi(t)\,\Phi(t_0+T)$

On va montrer par la suite (voir 39) que, $\Phi(t_0+T)$ étant inversible, elle peut toujours s'écrire

$$\Phi(t_0+T) = e^{TB} \quad B \text{ complexe constante}$$

alors en reprenant $*$

$$\Phi(t+T)\,e^{-(t+T)B} = \Phi(t)\,e^{-tB} := P(t)$$

$P(t)$ est bien T-périodique complexe. Si on cherche une relation avec des matrices réelles, alors

$$\Rightarrow \Phi(t+2T) = \Phi(t)\,\Phi(t_0+T)^2$$

et le lemme (voir 39) affirme que $\Phi(t_0+T)^2$ peut s'écrire

$$\Phi(t_0+T)^2 = e^{2TB}, \quad B \text{ réelle constante}$$

Alors $\Phi(t+2T)\,e^{-(t+2T)B} = \Phi(t)\,e^{-tB} := P(t)$

est $2T$ périodique réelle. ∎

39. __Lemme__ Si M est une matrice inversible alors M possède "un logarithme complexe" : il existe B complexe telle que $M = e^B$. Si M est réelle, alors M^2 admet "un logarithme réelle" : il existe B réelle telle que $M^2 = e^B$

__preuve__ Quitte à décomposer M en blocs de Jordan, on peut supposer que M admet une unique v.p. λ et que M se met sous la forme $M = D + N$ avec $DN = ND$ et

$$0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad D = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R} \not\ni \lambda = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \quad D = \begin{bmatrix} \rho R_\theta & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho R_\theta \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\dim(D)$ paire $\quad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nous allons voir que le seul cas où B n'est pas réelle est lorsqu'il existe des v.p. $\lambda \in \mathbb{R}^-_*$; il suffira alors de considérer M^2 de v.p. $\lambda^2 \in \mathbb{R}^+_*$ (le cas $\lambda = \rho e^{i\pi/2}$ par exemple, ne necessite pas de passer au carré).

Comme $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$M = \lambda\left(I + \frac{N}{\lambda}\right)$$

et comme $\ln(\lambda)$ existe, il reste à trouver un logarithme de $I+\tilde{N}$. Pour $\|\tilde{N}\|<$ on pose

$$\ln(I+\tilde{N}) = \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{j+1} |\tilde{N}|^{j+1}$$

et comme $1+u = \exp(\ln(1+u))$, pour $|u|<1$,

$$1+u = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!}\left[\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{j+1} u^{j+1}\right]^i$$

pour $\|N\|<1$ on obtien

$$I+\tilde{N} = \exp(\ln(I+\tilde{N}))$$

Comme N est nilpotente $\tilde{N}^k=0$ pour k suffisamment grand.
$\ln(I+\tilde{N})$ possède une définition comme polynôme en N qui s'étend alors à toutes les matrices N.

$$I+\tilde{N} = \exp\left[\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j+1} \tilde{N}^{j+1}\right]$$

Le cas $\lambda = \rho e^{i\theta}$ est identique

$$M = D[Id+\tilde{N}] \qquad \tilde{N} = \begin{bmatrix} 0 & \rho^{-1}R_{-\theta} & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \rho^{-1}R_{-\theta} \\ & O & & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{N}$ est nilpotente et la formule précédente convient. Il reste à montrer que R_θ admet un logarithme, En effet

$$R_\theta = \exp(\theta J_2) \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ J_2^2 = -1.$$

$$\exp(\theta J) = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \theta^{2p} I_2 + \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \theta^{2p+1} J_2 \blacksquare$$

40. <u>Remarque</u> 1) $\Phi(t_0+T, t_0) = e^{TB_0}$ est appelé opérateur de monodromie : il décrit l'évolution du système au bout d'une période T ; B_0 dépend du choix de t_0.
2) Si on connait B_0 (qui n'est pas évident), l'équation

$$X' = A(t)X$$

se transforme en posant $Y = P(t)^{-1}X$ en une équation à coefficient constant

$$Y' = BY.$$

En effet, d'une part

$$X = P(t)Y \Rightarrow X' = P'Y + PY' = AX = APY.$$

d'autre part, Φ étant la résolvante,

$$\Phi' = A\Phi = P'e^{tB} + PBe^{tB} = APe^{tB}$$

D'où $\quad P' = AP - PB$

$$PY' = APY - P'Y = PBY.$$

$$Y' = BY$$

41 __Exemple__ On considère l'équation

$$X' = R_{-\theta} B R_{\theta} X \quad , \theta = \theta(t) = \omega t \ , \ t_0 = 0$$

(R_θ la matrice de rotation θ). $A(t)$ est donc $\frac{2\pi}{\omega}$ périodique. On cherche l'opérateur de monodromie.

On pose $Y = R_\theta X$

$$Y' = BY + \frac{d}{dt} R_\theta X$$

$$\frac{d}{d\theta}\begin{bmatrix} \cos & -\sin\theta \\ \sin & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = J_2 R_\theta$$

D'où

$$Y' = (B + \omega J_2) Y \qquad Y = e^{t(B+\omega J)} Y_0$$

$$X = R_{-\omega t}\, e^{t(B+\omega J)} X_0$$

ou bien sous forme de matrice fondamentale

$$\Phi(t, t_0) = R_{-\omega(t-t_0)}\, e^{(t-t_0)(B+\omega J)}$$

42 __Conséquence au niveau de la stabilité__ Les solutions de $X' = A(t)X$, $A(t+T) = A(t)$, sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ tout entier ssi dans la décomposition de Floquet, l'opérateur de monodromie e^{TB} est diagonalisable et a toutes ses v.p. de module 1.

__preuve__ $X(t) = P(t)Y$ avec $Y' = BY$. Dans chaque bloc de Jordan correspondant à la v.p. complexe λ

$$B = \lambda I + N \qquad N^n = 0 \qquad n = \dim(B)$$

$$e^{tB} = e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k N^k}{k!}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{bmatrix} \qquad e^{tB} = e^{t\lambda}\begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ O & & & 1 \end{bmatrix}$$

Pour que la solution $y(t)$ soit bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier, il est necessaire que $\lambda = ib$ soit imaginaire pur et que les blocs de Jordan soit reduit à la dimension 1 $(N=0)$.

43 <u>Equation de Hill</u> On considère l'equation

$$(H) \begin{cases} x'' + p(t)x = 0 \\ p(t+T) = p(t) \end{cases}$$ Lipschitz périodique

La solution fondamentale est donnée par

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{bmatrix}$$

qu'on récrit comme $\begin{cases} X' = Y \\ Y' = -p(t)X \end{cases}$

où x_1 et x_2 sont les solutions de (H) avec comme condition initiale

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x'_2 \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'operateur de monodromie est donnée par

$$\Phi(t_0+T, t_0) = \begin{bmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x'_1(T) & x'_2(T) \end{bmatrix} = e^{TB}$$

Le theoreme de Liouville implique

$$\det(\Phi(t_0+T, t_0)) = \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{tr}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{bmatrix} ds\right) = 1$$

Les valeurs propres $\frac{1}{2}\left[\mathrm{trace}(\Phi) \pm \sqrt{\mathrm{trace}^2(\Phi) - 4\det(\Phi)}\right]$ sont :

— réelles distinctes $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$, $\lambda \neq \pm 1$,
alors $|\mathrm{trace}(e^{TB})| > 2$, B est une matrice réelle.
$x(t) \in \mathrm{Vect}(a_1(t)e^{\lambda t}, a_2(t)e^{\lambda^{-1} t})$, a_i T-périodique

— complexes conjuguées de module 1 $(e^{i\omega T}, e^{-i\omega T})$
$|\mathrm{trace}(e^{TB})| = 2|\cos(\omega T)| < 2$, B est réelle
$x(t) = a(t)\cos(\omega t) + b(t)\sin(\omega t)$, a et b T-periodique

— de multiplicité 2, égales à 1
$|\mathrm{trace}(e^{TB})| = 2$, B est réelle
$x(t) \in \mathrm{Vect}(a_1(t), a_2(t) + tb_2(t))$. a_i, b_i T-periodique

— de multiplicité 2 égales à -1
$|\mathrm{trace}(e^{TB})| = 2$, B est reelle ou complexe
$\Phi(t_0+T, t_0)^2 = e^{2TB}$, B reélle
$x(t) \in \mathrm{Vect}(a_1(t), a_2(t) + tb_2(t))$, a_i, b_i $2T$-periodique