

III Théorie globale : cycles limites

On s'intéresse ici à l'existence d'orbites périodique observées comme orbite d'accumulation. Il s'agit donc d'une théorie loin des points d'équilibre hyperbolique (puits, fontaine, source) et loin des spirales (stables ou instables). Les points nœuds dégénérés (une des v, p est nulle), les centres (deux v, p conjugués) sont des notions qui perdent leurs propriétés qualitatives après perturbation non linéaire.

66. Rappel. On se donne comme d'habitude un champ de vecteurs $\mathbb{R}^2 \dot{x} = f(x)$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. Si $\{\phi^t(x)\}_{t \geq 0}$ est une orbite positivement bornée, on appelle $\omega(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\phi^t(x)$ pour $t \geq 0$:

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \text{adh} \{ \phi^s(x) : s \geq t \}.$$

On appelle ensemble $\alpha(x)$ α -limite, l'ensemble ω -limite de $\{\phi^{-t}(x)\}_{t \geq 0}$. On appelle orbite périodique: un point $x \in U$ tel que $\phi^T(x) = x$, $T > 0$ est $T \in \mathbb{R} \rightarrow \phi^t(x)$ injectif.

67. Exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

En coordonnées polaires

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = \frac{x \dot{x} + y \dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \frac{-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta}{r} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{r^2} \end{cases}$$

Ici on obtient pour le premier système

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Le centre du linéarisé devient une spirale instable pour le système perturbé: aucune orbite période périodique dans aucun voisinage de 0.

Pour le second système

$$\dot{r} = r^3 \sin(1/r^2)$$

$$\dot{\theta} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \sin(1/(x^2 + y^2)) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \sin(1/(x^2 + y^2)) \end{cases}$$

Toutes les conditions initiales $\sin(1/r_0^2) = 0$ c'est-à-dire $r_0 = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$ donnent des orbites périodiques aussi proches de l'origine que l'on veut.

En conclusion, un centre perturbé peut donner naissance à une spirale (stable ou instable) ou à un nombre fini d'orbites périodiques, ou à une infinité. On montre en fait dans la proposition suivante que c'est un résultat général.

On suppose le damped vector plan $[d=2]$.
68. Proposition Supposons que x_* est un centre (non dégénéré) du système linéarisé $\dot{\xi} = Df(x_*)\xi$. Alors une des trois propriétés suivantes est réalisée :

1) Dans tout voisinage de x_* , il existe une orbite périodique.

2) x_* est asymptotiquement stable et il existe un voisinage $B(x_*, r_0)$ et $\omega_0 > 0$ tel que $|\dot{\theta}| \geq \omega_0$ dans $B(x_*, r_0)$: on parle de spirale stable.

3) x_* est asymptotiquement instable et il existe un voisinage $B(x_*, r_0)$ et $\omega_0 > 0$ tel que $|\dot{\theta}| \geq \omega_0$ dans $B(x_*, r_0)$: on parle de spirale instable.

Preuve. Quitte à faire un changement de base, on se ramène à

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_1 y + a(x, y) \\ \dot{y} = \omega_1 x + b(x, y) \end{cases} \quad (x_* = 0)$$

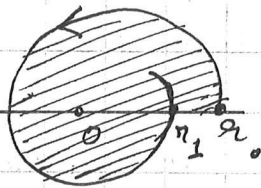
avec $a(x, y) = O(x^2 + y^2)$ et $b(x, y) = O(x^2 + y^2)$. On récrit ces équations en polaire

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\theta A(r, \theta) + \sin\theta B(r, \theta) \\ \dot{\theta} = \omega_1 + [\cos\theta B(r, \theta) - \sin\theta A(r, \theta)]/r \end{cases}$$

avec $A(r, \theta) = a(r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $B(r, \theta) = b(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
 En particulier $\dot{\theta} = \omega_2 + C(r, \theta)$ avec $C(r, \theta) = O(r)$
 et pour r suffisamment petit $|\dot{\theta}| \geq \frac{1}{2} \omega_2 = \omega_0$: tant
 que la trajectoire reste dans un voisinage de 0 , $t \mapsto \theta(t)$
 est un C^2 difféomorphisme; on peut paramétrer par θ au lieu
 de t et $r = r(\theta)$ devient une fonction C^2 de θ

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\cos(\theta) A(r, \theta) + \sin(\theta) B(r, \theta)}{\omega_2 + \omega_1 + C(r, \theta)} = g(r, \theta)$$

Oubien, dans tout voisinage de 0 , il existe une orbite
 périodique, et c'est le cas 1), ou bien dans un
 voisinage $B(0, r_0)$, il n'en existe aucune. Pour $r_0 > 0, \theta_0$
 (suffisamment petit), la solution $r(\theta)$
 est définie sur $[0, 2\pi]$ et



$$r(2\pi) \neq r(0)$$

On cherche le cas $r(2\pi) \leq r(0)$

(l'autre cas est obtenu en faisant $\tilde{r}(t) = r(-t)$). On
 remarque que $\theta \mapsto r(\theta)$ et $\theta \mapsto r(\theta + 2\pi)$ sont 2 solutions
 distinctes ne se coupant pas et donc

$$r(4\pi) \leq r(2\pi) < r(0).$$

Plus généralement $r_k(\theta) = r(\theta + 2\pi k)$ est une
 suite de croissante de fonctions C^2 uniformément bornée
 en norme C^2 . On peut en extraire une sous suite
 convergent au norme C^1 .

$$\begin{cases} r_k(\theta) \rightarrow r_\infty(\theta) \\ r_\infty(\theta + 2\pi) = r_\infty(\theta) \\ \frac{dr_\infty}{d\theta} = g(r_\infty, \theta) \end{cases}$$

ou bien $r_\infty(\theta) = 0 (\forall \theta)$ et 0 est un point asymptotiquement
 stable, ou bien $r_\infty(\theta) \neq 0 (\forall \theta)$ et on vient de construire
 une orbite périodique: en contradiction avec le point de
 départ.

La proposition précédente nous montre qu'un centre pour le linéarisé ne garantit pas l'existence d'orbite périodique. Nous allons voir comment dans certains cas, l'ensemble ω -limite permet de construire une orbite périodique. On commence par cette observation.

69 Proposition Soit x tel que la demi-trajectoire positive $\{\phi^t(x)\}_{t \geq 0}$ soit bornée. Alors $\omega(x)$ est un ensemble compact, connexe, ϕ^t -invariant.

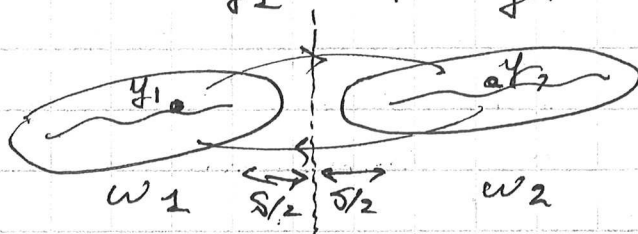
preuve $\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \text{adh} \{\phi^s(x), s \geq t\}$ est fermé borné donc compact.

2) Si $y \in \omega(x)$ et $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y$, $t_n \rightarrow +\infty$, alors $\phi^{t_n}(y) \rightarrow \phi^t(y)$ et donc $\phi^t(y) \in \omega(x)$ qui est bien invariant.

3) Pour montrer la connexité, on raisonne par l'absurde: supposons qu'il existe deux compacts ω_1, ω_2 non vides disjoints tels que

$$\omega(x) = \omega_1 \sqcup \omega_2$$

Prenons $y_1 \in \omega_1$ et $y_2 \in \omega_2$ alors on peut trouver



des instants $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots$

tels que $\phi^{t_n}(x) \rightarrow y_1$
 $\phi^{s_n}(x) \rightarrow y_2$

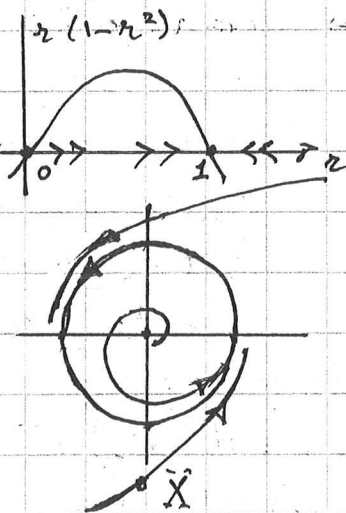
On note $\delta = \text{dist}(\omega_1, \omega_2) > 0$. Par continuité du flot on peut trouver, pour n suffisamment grand, des instants

$t_n < \sigma_n < \Delta_n$ tels que $d(\phi^{\sigma_n}(x), \omega_1) = \frac{\delta}{2}$
 Les points d'accumulation de $\phi^{\sigma_n}(x)$ ne sont ni dans ω_1 , ni dans ω_2 .

70. Definition On appelle cycle limite, une orbite périodique contenue dans l'ensemble α -limite ou ω -limite d'un point hors de l'orbite périodique.

71. Exemple

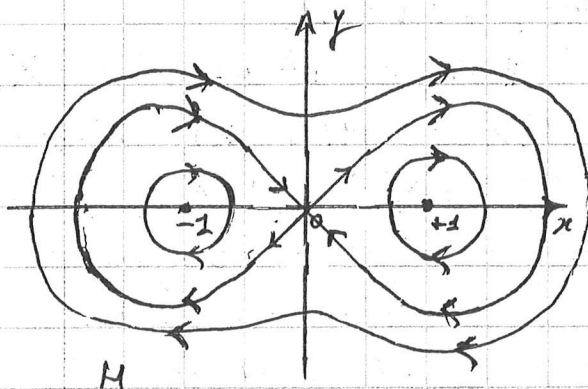
$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$



- 0 est point d'équilibre unique et c'est un centre pour l'équation $\dot{r} = r(1-r^2)$.
- 0 est instable et 1 (l'autre point d'équilibre) est stable.
- $r=1$ est un cycle limite égal à $w(\tilde{x})$ pour tout $\tilde{x} \neq 0$.

72. Exemple

Dans l'exemple suivant, on construit aussi



H est constant le long du flot.

une courbe fermée simple invariante par le flot mais qui n'est pas un cycle limite. On considère le système décrit par l'hamiltonien

$$H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

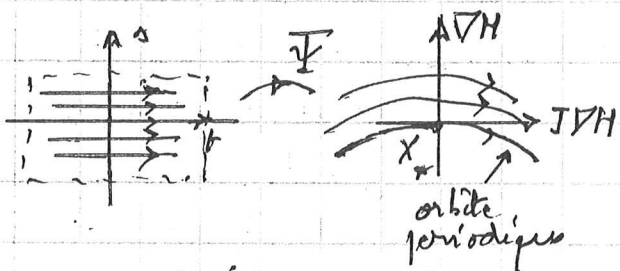
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x(x^2-1) \end{cases}$$

Il y a 3 points d'équilibre $x = -1, 0, +1$ et $y = 0$

Le linéarisé aux points d'équilibre est

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & 0 \end{bmatrix}$$

$D^2H|_{X=[0]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $D^2H|_{X=[\pm 1]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
 $X=[0]$ est un point selle de $X=[\pm 1]$ sont des centres (orientés négativement). Soit X_* un point de la variété instable locale de $0: \alpha(X) = 0$ et H est constant le long du flot. Nous allons voir (Théorème de Poincaré-Bendixon) que, ou bien $\omega(X_*)$ contient un point d'équilibre ou bien est un cycle limite (sans point d'équilibre). Nous



alors voir que le deuxième cas est impossible. Soit X_* un point du cycle limite $\nabla H(X_*) \neq 0$ est \perp aux trajectoires

(*) Si γ est proche de X_* et $H(\gamma) = H(X_*)$ alors γ appartient à l'orbite de X_*

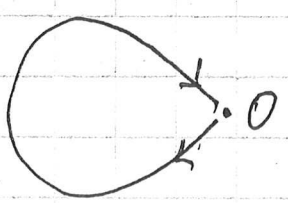
On construit un redressement du flot par :

$$\Phi(b, s) = \Phi^b(X_* + s \nabla H(X_*))$$

Le nouveau champ de vecteur est (b, s) est $\begin{cases} b=1 \\ s=0 \end{cases}$
 Par ailleurs $H \circ \Phi(b, s)$ est constant en t pour s fixé et

$$s \mapsto H \circ \Phi(0, s) = H(X_* + s \nabla H(X_*)) \quad (*)$$

a pour dérivée en $s=0 : \|\nabla H(X_*)\|^2 \neq 0$. Si X_* appartenait à $\omega(X)$, il existerait $b_n \rightarrow +\infty$ tel que $\Phi^{b_n}(X) \rightarrow X_*$, $H(\Phi^{b_n}(X)) = H(X_*)$ et $\Phi^{b_n}(X)$ serait dans l'orbite de X_* ce qui est impossible. On vient donc de montrer que $\omega(X_*)$ contient des points d'équilibre, mais $H(X) = H(0) = 0$ et $H([\pm 1]) = -1/4$ donc $\omega(X) = 0$, nécessairement $\Phi^t(X) \rightarrow 0$. On vient de construire une séparatrice homoclinique en 0



une orbite complète $\{\Phi^t(x)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

$$\begin{cases} \lim_{b \rightarrow +\infty} \Phi^b(x) = 0 \\ \lim_{b \rightarrow -\infty} \Phi^b(x) = 0 \end{cases}$$

72. Théorème (Poincaré - Bendixon) Soit $\dot{x} = f(x)$ un champ de vecteurs planaire ($x \in U \subset \mathbb{R}^2$) de classe C^1 . Soit $\{ \varphi^t(x) \}_{t \geq 0}$ une orbite positive bornée qui n'est pas une orbite périodique. Si $U(x) \subset U$ et ne contient pas de points d'équilibre, alors $U(x)$ est un cycle limite.

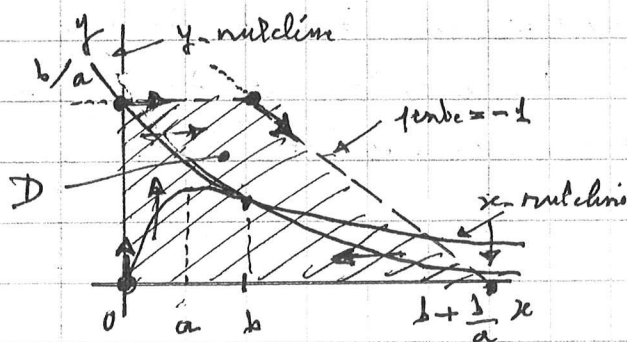
73. Exemple On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} = b - ay - x^2 y \end{cases} \quad \begin{cases} a, b > 0 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Points d'équilibre : intersection des nulclines.

$$\begin{aligned} \text{x-nulcline : } & y = \frac{x}{a+x^2} & (\dot{y} < 0 \Leftrightarrow y > \frac{b}{a+x^2}) \\ \text{y-nulcline : } & y = \frac{b}{a+x^2} & (\dot{x} < 0 \Leftrightarrow y < \frac{x}{a+x^2}) \end{aligned}$$

D'où $X_* = [b, b/(a+b^2)]$.



On cherche à montrer l'existence d'un domaine D invariant : on utilise que si le champ de vecteurs est rentrant sur ∂D alors D est invariant.

Sur $y = \frac{b}{a}$: $\dot{y} < 0$ (sauf en $x=0$ où $\dot{y} = 0$)

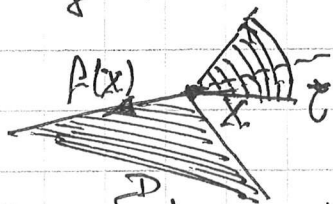
Sur $x = 0$: $\dot{x} > 0$ (sauf en $y=0$ où $\dot{x} = 0$)

Sur $y = 0$: $\dot{y} > 0$

Sur la droite d'équation : $y = -(x-b) + \frac{b}{a}$ (de pente -1)

$\dot{x} + \dot{y} = b - x < 0$ (sauf en $x=b$)

Aux 3 points, $[0]$, $[b/a]$, $[b/a]$, le champ de vecteurs est tangent (non rentrant) mais admettent des cônes \mathcal{C} locaux



disjoint de D et contenant $-f(x)$ pour ε suffisamment petit.

On montre maintenant que $X_* = [b, b/(a+b^2)]$ est une source

$$\mathcal{D}f(X) = \begin{bmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -(a + x^2) \end{bmatrix}$$

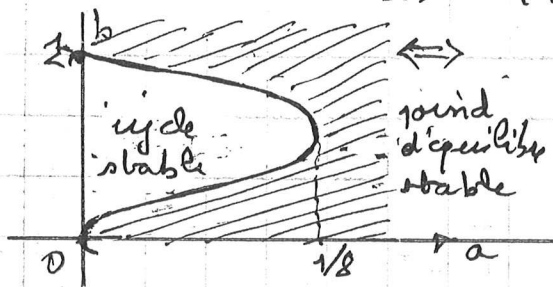
$$\det(\mathcal{D}f(X)) = a + x^2 > 0 \quad ; \quad 2 \text{ v.p. de m\^e signe}$$

$$\text{tr}(\mathcal{D}f(X)) = -1 + 2xy - (a + x^2)$$

$$\text{tr}(\mathcal{D}f(X_*)) = -1 + \frac{2b^2}{a+b^2} - (a+b^2) = - \frac{b^4 + (2a-1)b^2 + a^2}{a+b^2}$$

X_* est stable \Leftrightarrow

$$b^4 + (2a-1)b^2 + a^2 + a > 0$$



$$b^2 = \frac{1}{2} (1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a})$$

Conclusion: pour les paramètres (a, b) dans la zone hachurée

le point d'équilibre est un puit

(Poincaré). Pour la zone non hachurée, le point d'équilibre est une source, le champ de vecteurs est sortant d'un disque B petit centré en ce point et d'après Poincaré-Bendixon, le domaine $D \setminus B$ admet un cycle limite stable ($= \omega(x)$) pour tout $x \in D \setminus B$.

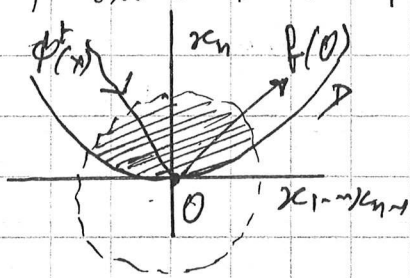
On a utilisé dans l'exemple 73 précédent une propriété géométrique du champ de vecteurs qui nous a permis de localiser l'ensemble ω -limité.

74. Lemme Soit D un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d vérifiant $\bar{D} \subset U$ et tel que pour tout $x \in \bar{D}$, le champ de vecteurs $f(x)$ est strictement rentrant en tout point régulier, c'est-à-dire il existe un hyperplan H passant par x , et une boule $B(x, \epsilon)$ centrée en x tels que $f(x)$ est non tangent à H , et $f(x)$ et $B(x, \epsilon) \cap D$ se situent du même côté par rapport à H .

Alors $\Phi^t(x) \subset D$ pour tout $x \in D$, pour tout $t \geq 0$

preuve Soit $x \in D$ et $t_1 > 0$ le premier instant de sortie :

$\phi^{t_1}(x) \in \partial D$ et $\phi^t(x) \in D$ pour $t \in]0, t_1[$.



On peut changer de coordonnées de sorte que $\phi^{t_1}(x) = 0$ et $D \cap B(0, \epsilon)$ correspond à la condition $x_n > 0$. Par hypothèse $f(0) = (f_1, \dots, f_n)$ avec $f_n > 0$. (On n'est pas un point d'équilibre).

Par ailleurs en faisant un DL à l'ordre 1

$$\phi^t(x) = \phi^{t_1}(x) + (t - t_1) \cdot \quad + o(t - t_1)$$

$$= (t - t_1) f(0) + o(t - t_1)$$

$$\phi_n^{t_1}(x) = (t - t_1) f_n + o(t - t_1)$$

pour $t < t_1$, $\phi_n^{t_1}(x) > 0$ et donc $f_n \leq 0$: on obtient une contradiction : $\phi^t(x)$ ne sort jamais de D . ■

75. Les systèmes de Liénard Il s'agit d'une classe

d'exemple d'équations du second ordre du type "équation du pendule" avec un terme d'amortissement pour des grandes oscillations et "d'amortissement négatif" pour les petites oscillations :

$$1) x'' + p(x)x' + q(x) = 0$$

$$2) q(x) = -q(-x) \quad \text{et} \quad q(x) > 0 \text{ pour } x > 0$$

$$3) p(x) = p(-x) \quad \text{et} \quad p(0) < 0$$

$$4) F(x) := \int_0^x p(u) du \quad \text{admet} \quad \pm \text{ unique zéro } \sigma$$

$$a > 0 : F(x) < 0 \text{ pour } 0 < x < a, F(x) > 0 \text{ pour}$$

$$x > a \text{ et } x \in [a, +\infty[\rightarrow F(x) \text{ et croissant de limite } +\infty$$

Par exemple : l'équation de van der Pol est une équation de Liénard

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$$

On posera par la suite

$$G(x) := \int_0^x q(u) du$$

$$E(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x)$$

$G(x)$ joue le rôle d'un potentiel d'une force centrale.

On comme par recrise l'equation dans le plan des phases

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

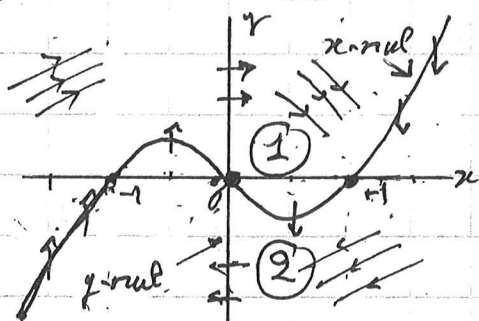
avec pour point d'equilibre :

$$\begin{cases} y = F(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

De matrice jacobienne

$$\begin{bmatrix} -f'(0) & 1 \\ -g'(0) & 0 \end{bmatrix} = M \Rightarrow \begin{cases} \det(M) = g'(0) \geq 0 \\ \text{tr}(M) = -f'(0) > 0 \end{cases}$$

admettant 2 v.p. (ou bien 2 m. signes positives ou nulles, ou bien imaginaires conjuguées de parties réelles strictement positives). Dans tous les cas, $O = (0, 0)$ est instable pour le système linéaire.



Nulcline pour van der Pol :

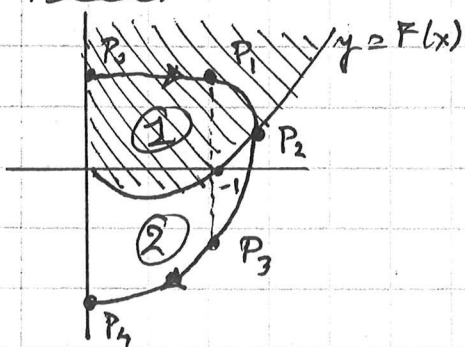
x -nulcline : $y = 0$.

y -nulcline : $-x - \mu(x^2 - 1)y$

On remarque aussi que pour $\mu \neq 0$, les orbites sont des cercles concentriques.

Theoreme (Lienard) Pour une equation de Lienard verifiant 1) - 4), il existe un unique cycle limite (stable) egal a l'ensemble ω -limite de toute trajectoire (non issue de l'origine)

preuve



* On considere une trajectoire issue de P_0 ; tant que la trajectoire reste dans le quadrant ①, $x \uparrow, y \downarrow$. Restant bornée, elle admettrait une limite si elle ne sortait pas de ① qui serait un point d'équilibre autre que l'origine. Donc nécessairement, la trajectoire coupe la x -nulcline en P_2 .

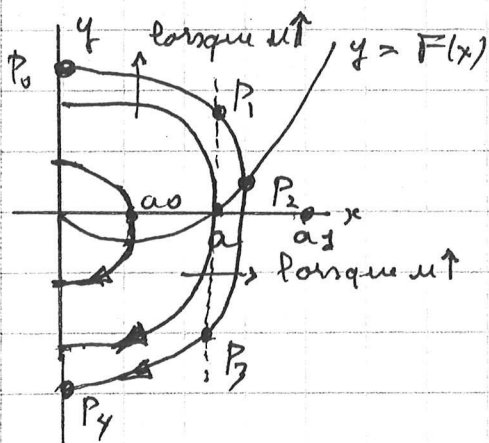
* On remarque aussi que le champ de vecteurs est impair et donc que si $t \mapsto (x(t), y(t))$ est solution, $t \mapsto (-x(t), -y(t))$ est aussi solution. La trajectoire issue de P_0 est fermée si et seulement si P_4 est symétrique à P_0 par rapport à O .

* On considère une trajectoire issue de P_2 : alors $x(t) \downarrow$ et $y(t) \uparrow$ tant que celle-ci reste dans le quadrant ②. Montrons qu'elle sort de ② en un point P_3 . La trajectoire ne peut pas sortir sur $\{y = F(x), a \leq x \leq x_2\}$ car le champ de vecteurs est rentrant. La trajectoire doit rester bornée (sinon $y - F(x) \rightarrow -1$ pour y suffisamment négatif et $x' \leq -\epsilon$ impliquerait $x(t) = 0$ en temps fini). Elle admet une limite différente de l'origine et qui doit être un point d'équilibre; contradiction.

* On note $u = x_2$ l'abscisse de P_2 et $x(t, u), y(t, u)$ les solutions définies sur $[t_0(u), t_1(u)]$ passant par $P_2 = (u, F(u))$ à $t = 0$. On cherche à montrer que

$$\Delta E(u) = E(P_4) - E(P_1) = \frac{1}{2} y_4^2 - \frac{1}{2} y_0^2$$

est une fonction strictement décroissante sur $u > a$,



$$\Delta E(a) > 0 \text{ et } \Delta E(+\infty) = -\infty$$

On aura démontré l'existence d'un a_1 tel que

$$\Delta E(a_1) = 0 \iff y_4 = -y_0$$

On décompose ΔE en 3 parties

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3$$

$$\Delta E_1 = E(P_1) - E(P_0)$$

$$\Delta E_2 = E(P_3) - E(P_1)$$

$$\Delta E_3 = E(P_4) - E(P_3)$$

On montre que chaque terme est strictement décroissant en u .

$$\Delta E_1 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dE}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} (y \dot{y} + g(x) \dot{x}) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (-y g(x) + g(x) (y - F(x))) dt$$

(*) et l'intervalle d'intégration ↑

$$\Delta E_1 = \int_{t_0}^{t_1} -g(x)F(x) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)} \frac{dx}{dt} dt.$$

En écrivant $y = Y_1(x, u)$

$$\Delta E_1(u) = \int_0^a \frac{-g(x)F(x)}{Y_1(x, u) - F(x)} dx$$

Les trajectoires ne se croisent pas, lorsque $u \uparrow$, pour $x \in]0, a[$ fixé, $Y_1(x, u) \uparrow$. Par ailleurs $-g(x)F(x) > 0$ sur $]0, a[$ et donc $u \mapsto \Delta E_1(u)$ est strictement décroissante. Pour le troisième terme, on a

$$\Delta E_3(u) = \int_a^0 \frac{-g(x)F(x)}{Y_3(x, u) - F(x)} dx$$

$$= \int_0^a \frac{g(x)F(x)}{Y_3(x, u) - F(x)} dx$$

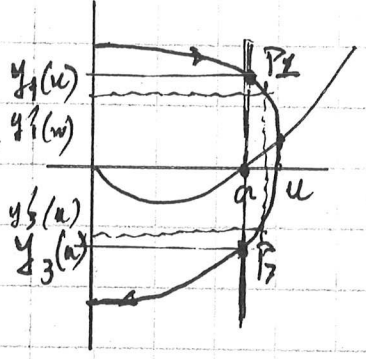
lorsque $u \uparrow$ le terme $Y_3(x, u) - F(x)$ $Y_3(x, u) \downarrow$ à x fixé: $u \mapsto \Delta E_3(u)$ est décroissant. Pour le deuxième terme

$$\Delta E_2(u) = \int_{t_1}^{t_2} -g(x)F(x) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(x) \frac{dy}{dt} dt$$

En écrivant $x = X(y, u)$ sur $[y_3(u), y_1(u)]$

$$\Delta E_2(u) = - \int_{y_3}^{y_1} F(X(y, u)) dy \quad (*)$$

lorsque $u \uparrow$, pour y fixé, $X(y, u) \uparrow$. Comme F est croissante sur $[a, +\infty[$, $u \mapsto \Delta E_2(u)$ est strictement décroissante.



Comme $\Delta E_1 > 0$ et $\Delta E_3 > 0$ pour $u \leq a$ on a $\Delta E(u \leq a) > 0$. Il reste à montrer par exemple que $\Delta E_2(+\infty) = -\infty$. On introduit les deux ordonnées $y'_{1,3}$ telles que

$$X(y'_{1,3}(u), u) = a + 1 \quad (\forall u > a)$$

Alors

$$\Delta E'_2 = E(P'_3) - E(P'_1)$$

$$= -F(a+1) (y'_1(u) - y'_3(u))$$

Comme $y_1(\cdot) \rightarrow +\infty$, lorsque $u \rightarrow +\infty$,

$$\sup_{a \leq x \leq a+1} \left| \frac{dy}{dx} \right| = \left| \frac{-g(x)F(x)}{y - F(x)} \right| < +\infty$$

on a aussi $y'_{1,3}(u) \rightarrow +\infty$, et donc $\Delta E'_2(u) \rightarrow -\infty$. ■