

IX Introduction aux bifurcations

Une bifurcation décrit un changement de comportement qualitatif notable lorsque les paramètres du système traversent une valeur critique. On s'intéresse par exemple au lieu d'un point d'équilibre et à sa stabilité en fonction des valeurs d'un seul paramètre : on parle alors de bifurcation de codimension 1 : le point d'équilibre peut passer de stable à instable ; il peut aussi disparaître, se dédoubler...

1) Bifurcation en dimension 1

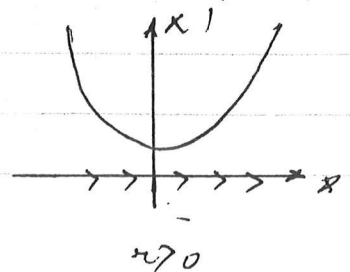
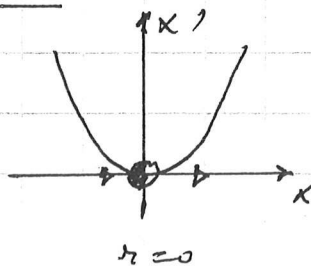
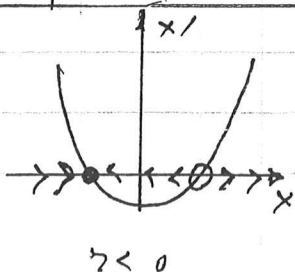
On considère un système $x' = f(x, r)$ où f est de classe C^1 , r est considéré comme un paramètre. On suppose que $x = 0$ est un point d'équilibre isolé : $f(0) = 0$ et $f(x) \neq 0$ pour x proche de 0. On suppose aussi que $r = 0$ est la valeur critique de bifurcation.

76. Remarque Si $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq 0$, alors $r = 0$ n'est pas une valeur de bifurcation. En effet, le théorème des fonctions implicites entraîne que l'équation en x

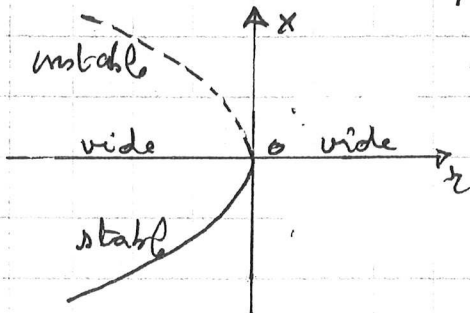
$$f(x, r) = 0 \quad x \text{ proche de } x=0, r \text{ proche de } r=0$$

admet une unique racine $x(r)$ qui vérifie aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(x(r), r) \neq 0$ par continuité et qui est donc isolée. Au voisinage de $r = 0$, le comportement de l'unique point critique reste inchangé : ou bien toujours stable $\frac{\partial f}{\partial x}(x(r), r) < 0$ ou bien toujours instable $\frac{\partial f}{\partial x}(x(r), r) > 0$.

77. Bifurcation selle-noeud (Forme normale : $x' = r + x^2$)



Pour $r < 0$ il y a 2 points fixes (un point stable $-\sqrt{-r}$ et un point stable $+\sqrt{-r}$). Pour $r = 0$, ces deux points rentrent en collision puis disparaissent pour $r > 0$.



On trace alors le diagramme de bifurcation : on trace gros le point stable, en trait pointillé le point instable.

La forme normale $x' = r - x^2$ est identique en inversant le

sens de r . Nous allons expliquer ici la notion de forme normale.

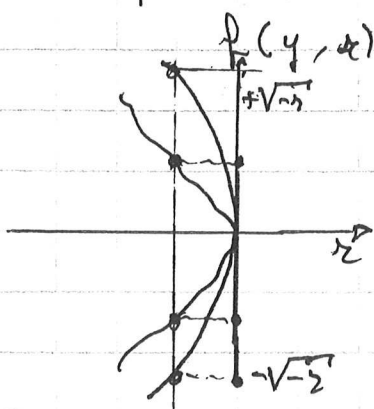
Forme normale Nous allons voir que $x' = r + x^2$ est la forme normale de $y' = f(y, r)$ avec :

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(0,0) \neq 0.$$

Formellement, cela signifie qu'il existe un homéomorphisme $x \mapsto y = h(x, r)$ défini localement en $x = 0$, et un changement de paramètre $r = R(r)$ localement inversible, envoyant les points d'équilibre de $x' = r + x^2$ sur les points d'équilibre de $y' = f(y, r)$ et les points réguliers de $x' = r + x^2$ sur ceux de $y' = f(y, r)$.

Une première réduction consiste à modifier y et r de sorte que (nous admettons cette première partie).

$\times O(r, y)$
de classe \mathcal{C}^2



$$f(y, r) = r + y^2 + O(r, y), \quad |O(r, y)| \leq C[|r| + |y|^2]$$

Il reste alors à construire $y = h(x, r)$ vérifiant, $h(0, r) = 0$

$$\begin{cases} h(\pm\sqrt{-r}, r) = y_{\pm}(r) \end{cases}$$

où $y_{\pm}(r)$ sont les deux seules racines de $f(y_{\pm}(r), r) = 0$.

En effet

$$f(y, r) = 0 \iff r = r(y) \text{ de classe } \mathcal{C}^2$$

$$\iff -r(y) = y^2 + O(r, y) = y^2 [1 + O(y)]$$

avec $O(y)$ de classe \mathcal{C}^2 bornée au voisinage de 0

$$f(y, r) = 0 \iff \begin{cases} y \geq 0 & \sqrt{-r(y)} = y [1 + y O(y)] \\ y \leq 0 & \sqrt{-r(y)} = -y [1 + y O(y)] \end{cases}$$

$y \mapsto \pm y [1 + y O(y)]$ sont 2 fonctions de classe C^2 de dérivées non nulles en $y=0$: Des fonctions réciproques sont aussi de classe C^2 , pour $r \leq 0$:

$$f(y, r) = 0 \iff \begin{cases} r \geq 0 & y = y_+(r) = \sqrt{-r} [1 + \sqrt{-r} O(r)] \\ r \leq 0 & y = y_-(r) = -\sqrt{-r} [1 + \sqrt{-r} O(r)] \end{cases}$$

On cherche à construire $h(x, r)$ par interpolation

$$h(x, r) = a(r) + b(r)x$$

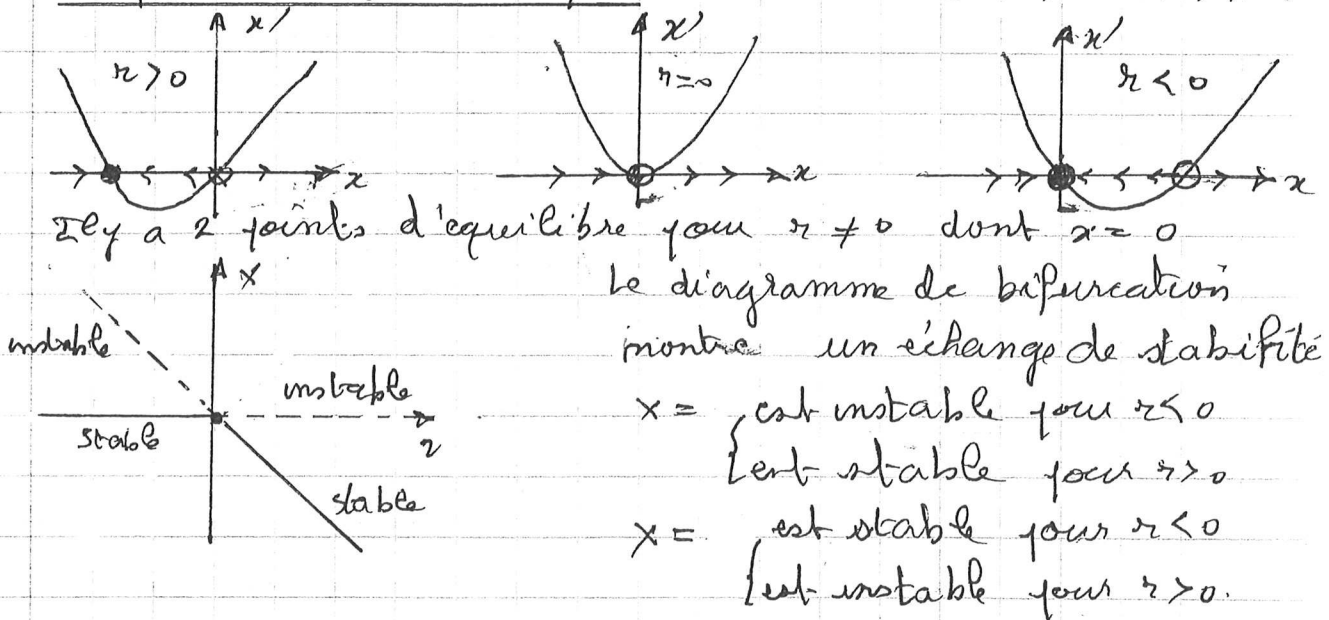
$$h(\sqrt{-r}, r) = y_+(r) \quad , \quad h(-\sqrt{-r}, r) = y_-(r)$$

D'où $a(r) = \frac{1}{2} [y_+(r) + y_-(r)]$

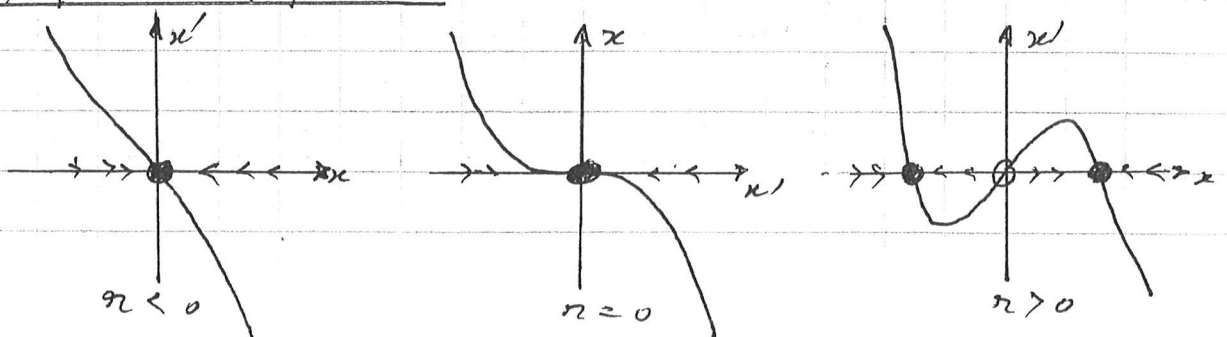
$$b(r) = \frac{1}{2\sqrt{-r}} [y_+(r) - y_-(r)]$$

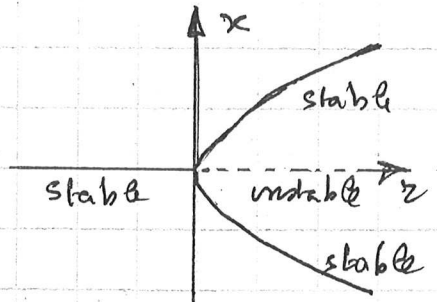
qui sont alors continues en $r=0$.

78 Bifurcation transcritique (Forme normale: $x' = rx + x^2$)



79 Bifurcation fourche I (Forme normale: $x' = rx - x^3$)



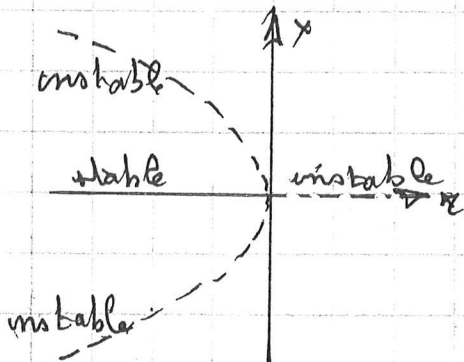
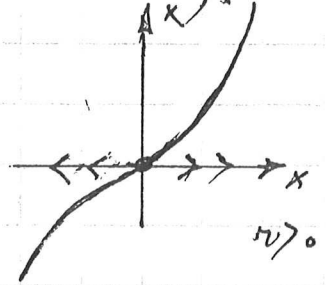
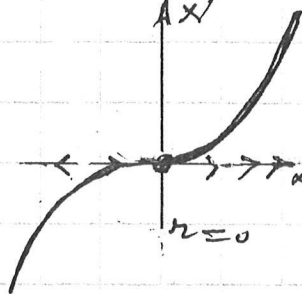
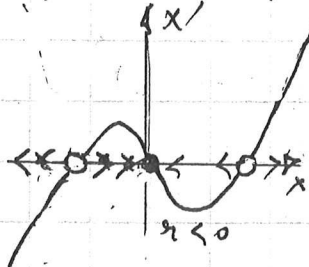


Le diagramme de bifurcation montre un dédoublement du point d'équilibre stable lorsque $z \uparrow$ en traversant $z=0$.

fourche sur-critique (3 points critiques dont 2 stables)

80. Bifurcation fourche II

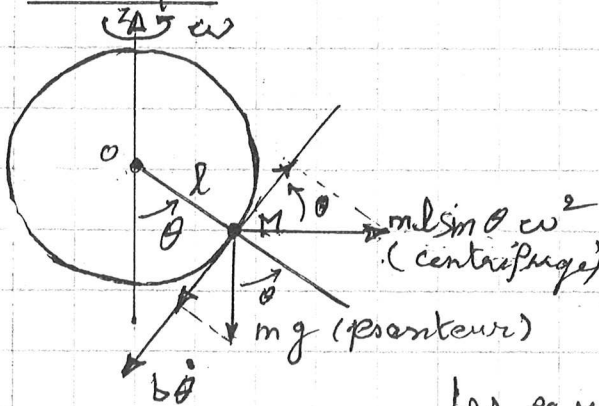
(Forme normale : $x' = \mu x + x^3$)



Le diagramme de bifurcation montre la collision de 3 points d'équilibre dont 2 instables pour ne donner qu'un point instable.

fourche sous-critique (3 points critiques dont 2 instables)

81. Exemple



Un anneau est en rotation uniforme ω autour d'un axe Oz et de centre fixe O . Une masse m coulisse sur cet anneau et subit une force de frottement de coefficient b .

Les équations sont :

$$m l \ddot{\theta} = -m g \sin \theta - b \dot{\theta} + m l \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

Hypothèse : le frottement dominé ($m^2 l g \ll b^2$)

On néglige alors le terme en $m l \dot{\theta}$ ce qui sera justifié ultérieurement. Les nouvelles équations sont

$$b \ddot{\theta} = -m g \sin \theta + m l \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

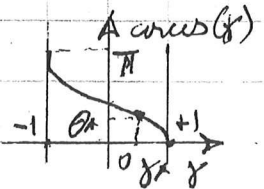
$$\ddot{\theta} = \frac{m l \omega^2 \sin \theta}{b} \left[\cos \theta - \frac{g}{l \omega^2} \right]$$

Les points d'équilibre sont donc

$$\theta = 0, \theta = \pi$$

$$\left\{ \theta = \arccos(\gamma), (\text{si } \gamma = \frac{g}{l \omega^2} < 1) \right.$$

on pose $\gamma = g / l \omega^2$



$$f(\theta, \gamma) = a \sin \theta \left[\cos \theta - \gamma \right]$$

On écrit un développement en $\theta = 0$ d'ordre 1 :

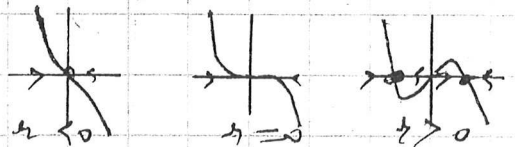
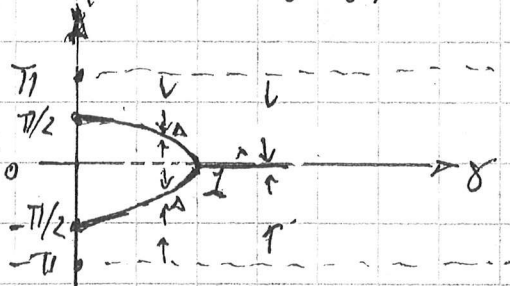
$$f(\theta, \gamma) = a \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right) \left(1 - \gamma - \frac{\theta^2}{2} \right) + o(\theta^3)$$

$$= a \theta \left(1 - \gamma - \theta^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1-\gamma}{6} \right) \right) + o(\theta^3)$$

$$= a \theta \left(1 - \gamma - \theta^2 \frac{3 + (1-\gamma)}{6} \right)$$

$$= \frac{a}{2} \theta (2 - \theta^2) + o(\theta^3 + \gamma^2)$$

on a posé $\gamma = g / l \omega^2$.



Le développement en $\theta = \pi$ et $\gamma = 1$ donne

$$f(\theta, \gamma) = -a (\theta - \pi) \left(1 - \frac{(\theta - \pi)^2}{6} \right) \left(-1 + \frac{(\theta - \pi)^2}{2} - \gamma \right) + o((\theta - \pi)^3)$$

$$= -a (\theta - \pi) \left(-1 - \gamma - \frac{(\theta - \pi)^2}{6} \left(-\frac{1}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= +2a (\theta - \pi) + o((\theta - \pi)^2 + (1 - \gamma)^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(\pi, 1) = +2a > 0 \quad \therefore \pi \text{ est instable}$$

Pour une vitesse de rotation $\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}$, le système retourne à son unique position d'équilibre $\theta = 0$.
Si la vitesse de rotation dépasse $\sqrt{\frac{g}{l}}$, 2 positions d'équilibre se forment à $\theta_x = \pm \arccos(g / l \omega^2)$.

Analyse dimensionnelle. On cherche un régime où l'approximation précédente est valable : on cherche un temps caractéristique τ^{-1} .

$$\frac{m l}{\tau^2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{m g}{\tau^2} \sin \theta + \frac{b}{\tau^2} \frac{d\theta}{dt} + \frac{m l \omega^2}{\tau^2} \cos \theta \sin \theta$$

$$\frac{m l \tau}{b} \frac{d^2 \theta}{d(b\tau)} = - \frac{m g}{\tau b} \sin \theta + \frac{d\theta}{d(b\tau)} + \frac{m l \omega^2}{\tau b} \cos \theta \sin \theta$$

On cherche donc un régime où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{m l \tau}{b} \ll \frac{m g}{\tau b} \\ \frac{m g}{\tau b} \sim \frac{\tau b}{m l \omega^2} \sim 1 \end{array} \right.$$

on prend alors

$$\tau = \frac{m g}{b} \sim \frac{m l \omega^2}{b}$$

$$\text{(pour } \gamma = \frac{g}{l \omega^2} \sim 1)$$

d'où la condition

$$\epsilon = \frac{m^2 g l}{b^2} \ll 1$$

L'équation non approchée devient (en posant $s = \tau b$)

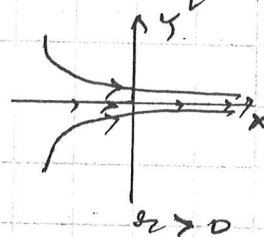
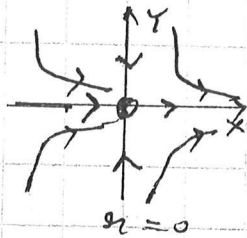
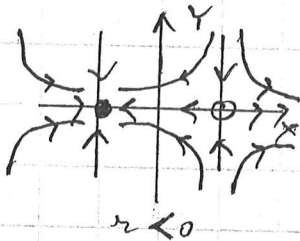
$$\epsilon \frac{d^2 \theta}{ds^2} = \frac{d\theta}{ds} - \sin \theta + \frac{1}{\gamma} \sin \theta \cos \theta$$

2) Bifurcation en dimension 2

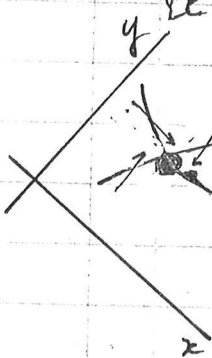
On retrouve en dimension 2, les 3 cas présentés dans l'exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = r + x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

bifurcation nœud



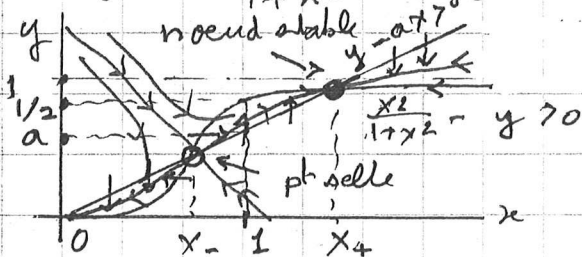
Le cas $r < 0$ arrive par exemple dans la figure suivante. Pour $r = 0$, les 2 nulclines deviennent tangentes.



On remarque que la bifurcation se produit lorsqu'une des valeurs propre devient nulle.

82. Exemple On considère le système

$$\begin{cases} x' = -ax + y \\ y' = \frac{x^2}{1+x^2} - y \end{cases} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$



Cela fait varier à l'intersection des 2 nulclines donne

$$ax = \frac{x^2}{(1+x^2)}$$

ou bien $x = 0$ ou bien $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2a}$, si $2a < 1$

La matrice jacobienne :

$$J = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -1 \end{bmatrix} \quad J_0 = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J_{\pm} = \begin{bmatrix} -a & 1 \\ \frac{2a}{1+x_{\pm}^2} & -1 \end{bmatrix}$$

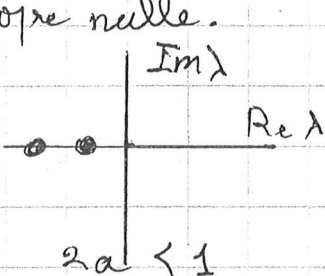
Le point d'équilibre $(0,0)$ est un noeud stable. Le déterminant de J à x_{\pm} est

$$\det(J) = a - \frac{2a}{1+x^2} = a \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

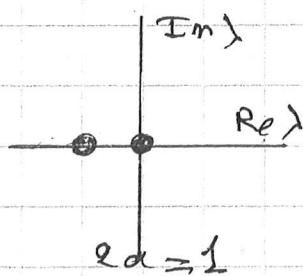
Le produit des racines est 1 donc $x_- < 1 < x_+$. Le point d'équilibre (x_-, y_-) est un point selle ($\det < 0$, $\text{tr} < 0$) et le point d'équilibre (x_+, y_+) est un noeud ($\det > 0$ ou < 0). Lorsque $a = \frac{1}{2}$ les deux points selle-noeud se touchent en collision puis disparaissent.

83. La bifurcation de Hopf: (forme normale)

Si on regarde l'exemple précédent et son point noeud stable, on observe que la perte de stabilité provient du passage d'une valeur propre strictement négative à une valeur propre nulle.

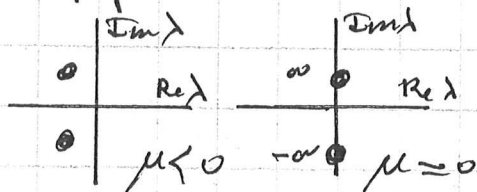


$2a < 1$
noeud stable



$2a = 1$
noeud stable dégénéré

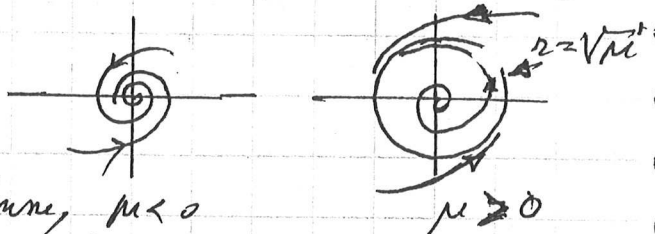
La perte de stabilité peut provenir d'un autre type de bifurcation :



Les deux valeurs propres sont complexes conjuguées dans tous les cas ; mais pour $\mu < 0$, $\text{Re } \lambda < 0$, $\text{Im } \lambda \neq 0$; $\mu = 0$, $\text{Re } \lambda = 0$, $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Cas sur-critique

$$\begin{cases} r' = \mu r - r^3 \\ \theta' = \omega + ar^2 \end{cases}$$



On calcule la matrice jacobienne, $\mu < 0$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{r'}{2} x - y \theta' \\ y' = \frac{r'}{2} y + x \theta' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (\mu - (x^2 + y^2))x - y(\omega + a(x^2 + y^2)) \\ y' = (\mu - (x^2 + y^2))y + x(\omega + a(x^2 + y^2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \mu x - \omega y + \text{termes d'ordre 3} \\ y' = \omega x + \mu y + \text{termes d'ordre 3} \end{cases}$$

$$J(\theta, 0) = \begin{bmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{bmatrix} \text{ de valeurs propres } \lambda = \mu \pm i\omega$$

Cas sous-critique

$$\begin{cases} r' = \mu r + r^3 - r^5 \\ \theta' = \omega + ar^2 \end{cases}$$

les racines de $\mu + r^2 - r^4$ sont pour $\mu < \frac{1}{4}$

$$r = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2} \right)^{1/2} \text{ pour } \mu > 0$$

