Département Licence

Systèmes Dynamiques
K1MA6021 9 mai 2012
Durée : 3h00 Ph. Thieullen

Solution de l'examen : première session

Exercice 1.

1. On définit $x(\tau) = N(\tau/r)/L$. En dérivant par rapport à τ on obtient
$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{rL}\frac{dN}{dt} = \frac{N}{L}\left(1 - \left(\frac{N}{L} - \frac{K}{L}\right)^2\right) = x(1-(x-a)^2).$$

2. Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant $f(x) = 0$. On obtient alors $x = 0$, $x = a-1$ ou $x = a+1$. Le tracer des graphes $\dot{x} = f(x)$ est donné dans la figure 1.

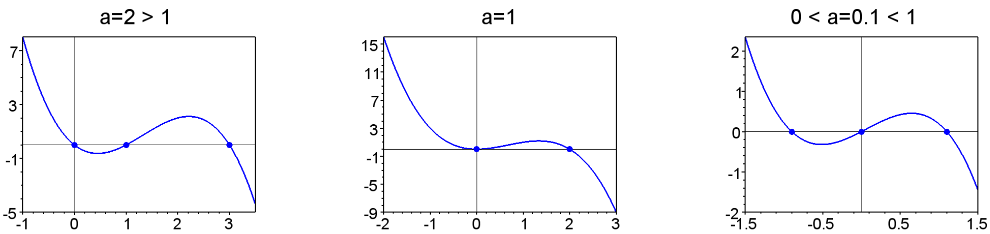

Figure 1 – Graphe de $\dot{x} = f(x)$ pour 3 cas de a.

   Pour $a \neq 0$, il y a 3 points d'équilibre, pour $a = 1$, il y a 2 points d'équilibre.

3. On suppose $a > 1$. Si initialement $x_0 \in [0, a+1]$ et s'il existait un temps positif fini d'explosion, $x(\tau)$ sortirait du compact $[0, a+1]$ et en particulier on aurait $x(\tau_1) = 0$ ou $x(\tau_1) = a+1$ pour un certain $\tau_1 > 0$. Ce qui est impossible d'après le théorème d'unicité des solutions. Si $x_0 > a+1$ et s'il existait un temps positif fini d'explosion, $x(\tau)$ sortirait du compact $[a+1, x_0+1]$. Comme précédemment $x(\tau)$ ne pourrait sortir en $a+1$ et il existerait un premier instant $\tau_1 > 0$ où $x(\tau_1) = x_0 + 1$. On aurait $x(\tau_1 - \epsilon) < x(\tau_1)$ pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit et
$$x'(\tau_1) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{x(\tau_1) - x(\tau_1 - \epsilon)}{\epsilon} \geq 0$$
en contradiction avec $x'(\tau_1) = f(x_0 + 1) < 0$. Le raisonnement est identique pour $x_0 < 0$. Si x_0 est égal à l'un des points d'équilibre, il y reste indéfiniment. Si $x_0 \in]-\infty, 0[\cup]0, a-1[\cup]a-1, a+1[\cup]a+1, +\infty[$, $x(\tau)$ reste dans l'intervalle correspondant indéfiniment et comme le signe de f ne change pas, $x(\tau)$ est monotone par rapport à τ, croissante bornée ou décroissante minorée. La limite existe et elle est nécessairement égale à un point d'équilibre.

4. Pour $a = 2$, la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{x(x-1)(3-x)} = \frac{-1/3}{x} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1/6}{3-x},$$

est obtenue en multipliant les deux membres par un des termes x, $x-1$ ou $3-x$, puis en faisant $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 3$ pour trouver le coefficient correspondant A, B ou C. L'équation différentielle est à variables séparées, en tenant compte de la condition initiale $x_0 = 2$ à $\tau_0 = 0$

$$\frac{dx}{x(x-1)(3-x)} = -\frac{dx}{3x} + \frac{dx}{2(x-1)} + \frac{dx}{6(3-x)} = d\tau,$$
$$-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x(\tau)}{2}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(\tau)-1}{1}\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3-x(\tau)}{1}\right| = \tau,$$
$$\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}(x-1)^{1/2}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{1/6} = e^{\tau}.$$

Comme $x(\tau)$ est un fonction croissante de limite $a+1 = 3$, on a bien

$$3 - x(\tau) \sim \frac{32}{9}e^{-6\tau}, \quad \text{pour} \quad \tau \to +\infty.$$

Exercice 2.

1. Soit $f_\alpha(p) = p + \alpha(p-\gamma)(1+p)^2$ et $f'_\alpha(p) = 1 + \alpha(1+p)(1+3p-2\gamma)$.
   (a) Si $p \leq 0$, $\alpha(p-\gamma)(1+p)^2 < 0$ et donc $f(p) < p$ et $f(p)$ ne peut pas s'annuler. De même, si $p \geq \gamma$, $\alpha(p-\gamma)(1+p)^2 \geq 0$ et donc $f(p) \geq p$ et $f(p)$ ne peut pas s'annuler. De plus $f(p)$ est un polynôme de degré 3 qui doit s'annuler en au moins un point p nécessairement vérifiant $p \in [0, \gamma]$.
   (b) S'il existait p tel que $f(p) = f'(p) = 0$, en éliminant α entre les deux équations, on aurait

   $$(1+p)(p-\gamma) = p(1+3p-2\gamma) \Leftrightarrow 2p^2 - p\gamma + \gamma = 0.$$

   Comme le discriminant du polynôme du second degré $\gamma(\gamma-8) < 0$ est strictement négatif, on obtient une contradiction.
   (c) Supposons qu'il existe 2 racines $f(p_1) = f(p_2) = 0$. Ou bien $m(\alpha) = \min_{p_1<p<p_2} f(p) < 0$ ou bien $\max_{p_1<p<p_2} f(p) > 0$. On traite seulement le premier cas. Comme $f_\alpha(p) \nearrow p$ uniformément sur $[p_1, p_2]$ lorsque $\alpha \searrow 0$ et que $m(0) > 0$, on peut trouver $\tilde{\alpha}$ tel que $m(\tilde{\alpha}) = 0$ et $p_1 < \tilde{p} < p_2$ tel que $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{p}) = f'_{\tilde{\alpha}}(\tilde{p}) = 0$. Ce dernier cas est impossible d'après la question (b).
2. Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant le systèmes

$$h\left(\frac{p}{1+p} - \alpha h\right) = p\left((\gamma - p) - \frac{h}{1+p}\right) = 0.$$

Ou bien $h = 0$ et $p(\gamma - p) = 0$ et on obtient 2 points d'équilibre sur l'axe $h = 0$ d'ordonnées $p = 0$ ou $p = \gamma$. Ou bien $h > 0$ et p est solution de l'équation

$$\alpha h = \frac{p}{1+p} = \alpha(\gamma - p)(1+p).$$

La question 1. montre qu'il existe une unique solution $p_* \in]0, \gamma[$ vérifiant l'équation précédente. Cette même équation définie h_*.

3. Le diagramme est donnée sur la figure 2 L'axe horizontal et la parabole

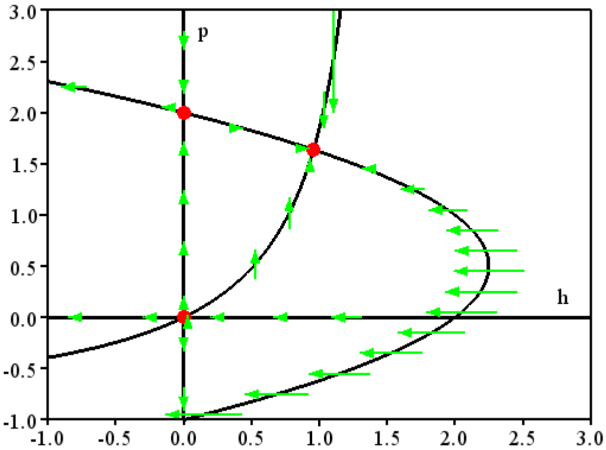

FIGURE 2 – Points d'équilibre, nulclines et champ de vecteur.

sont des p-nulclines, l'axe vertical et l'hyperbole sont des h-nulclines. Deux points d'équilibre sont sur l'axe vertical, le troisième a ses deux coordonnées strictement positives.

4. On écrit le système différentielle sous la forme

$$\frac{dh}{dt} = f(h,p), \quad \frac{dp}{dt} = g(h,p) \quad \text{avec} \quad \mathrm{Jac}(h,p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial h} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial h} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Aux deux points d'équilibre sur l'axe vertical, on a

$$\mathrm{Jac}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Jac}(0,\gamma) = \begin{bmatrix} \frac{\beta\gamma}{1+\gamma} & 0 \\ -\frac{\gamma}{1+\gamma} & -\gamma \end{bmatrix}$$

Le point $(0,0)$ est un point nœud instable ($\dot{h} = -\alpha\beta h^2$ sur l'axe $p = 0$) ; le point $(0,\gamma)$ est un point selle (donc instable). La matrice jacobienne au point (h_*, p_*) est de plus

$$\mathrm{Jac}(h_*, p_*) = \left(\frac{p_*}{1+p_*}\right) \begin{bmatrix} -\beta & \beta\frac{\gamma - p_*}{p_*} \\ -1 & \gamma - 1 - 2p_* \end{bmatrix}.$$

5. Pour $0 < \gamma \leq 1$, les signes des entrées de la matrice jacobienne sont
$$\text{signe}(\text{Jac}(h_*, p_*)) = \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix}$$
Sans calcul, on obtient que le déterminant de $\text{Jac}(h_*, p_*)$ est strictement positif et que la trace de $\text{Jac}(h_*, p_*)$ est strictement négative. Nécessairement, les deux valeurs propres sont strictement négatives. Le système différentielle non perturbé est donc asymptotiquement stable. Le calcul exact du déterminant donne
$$\det(\text{Jac}(h_*, p_*)) = \frac{\beta p_*}{(1+p_*)^2} \left(2p_*^2 - \gamma p_* + \gamma\right).$$
Le discriminant du polynôme du second degré est $\Delta = \gamma(\gamma - 8) < 0$ et le déterminant est bien strictement positif sous les hypothèses $0 < \gamma < 8$.
6. On rappelle d'abord que les deux axes sont des trajectoires particulières. Toute autre trajectoire passant par un point $h_0 > 0$ et $p_0 > 0$ ne coupe donc jamais les axes. Sur la demie-droite $p = \gamma + 1$ et $h > 0$, la composante verticale du champ de vecteur est strictement négative
$$\frac{dp}{dt} = (\gamma + 1)\left(-1 - \frac{h}{1+p}\right) < 0.$$
Sur la demie-droite $h = 1/\alpha$ et $p > 0$, la composante horizontale du champ de vecteur est négative
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\beta}{\alpha(1+p)} < 0.$$
Le rectangle $R = \{(h,p) \;:\; 0 < h < 1/\alpha,\ 0 < p < \gamma+1\}$ est donc une région absorbante : toute trajectoire issue d'un point de R est contrainte à rester dans $\bar{R}$ en tout temps positif.
7. On suppose maintenant que $1 < \gamma < 8$.
   (a) On constate d'abord que, si $p_* = (\gamma - 1)/2$, alors α est bien égale à $\alpha_* = 4(\gamma - 1)/(\gamma + 1)^3$. L'unicité de p_* nous permet d'inverser le raisonnement : si $\alpha = \alpha_*$, alors
   $$p_* = \frac{\gamma - 1}{2} \quad \text{et} \quad h_* = \frac{\gamma - 1}{\alpha(\gamma + 1)}.$$
   En reprenant la question 1. et en se rappelant que $f_\alpha(p)$ est strictement décroissante en α pour $p \in]0, \gamma[$ fixé, si $\alpha < \alpha_*$, $f_\alpha((\gamma - 1)/2) > 0$ et l'unique racine $p_*(\alpha)$ de l'équation $f_\alpha(p) = 0$ ne peut se trouver que dans l'intervalle $]0, (\gamma - 1)/2[$.
   (b) Pour $\alpha = \alpha_*$, la h-nulcline hyperbole coupe la p-nulcline parabole en son sommet. Les signes de la matrice jacobienne sont alors
   $$\text{signe}(\text{Jac}(h_*, p_*)) = \begin{bmatrix} - & + \\ - & 0 \end{bmatrix}.$$
   Là encore , les deux valeurs propres sont strictement négatives. On obtient la figure à gauche de la figure 3.

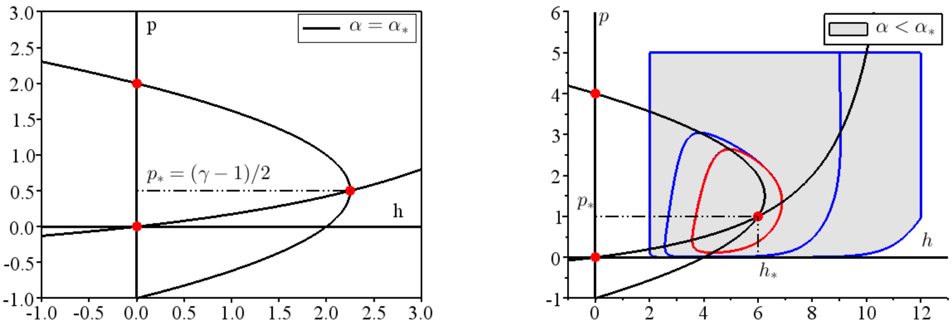

FIGURE 3 – Apparition d'un cycle limite pour $\alpha < \alpha_*$ et $\beta < \beta_*(\alpha)$.

(c) On suppose que $\alpha < \alpha_*$. En posant $\beta_*(\alpha) = \gamma - 1 - 2p_* > 0$ et en prenant $\beta < \beta_*(\alpha)$, on constate que la trace et le déterminant de $\mathrm{Jac}(h_*, p_*)$ sont strictement positifs. Le point (h_*, p_*) est donc une source : les deux valeurs propres sont strictement positives.

On cherche maintenant à construire un domaine ouvert borné R' absorbant et ne contenant aucun point d'équilibre dans $\bar{R}$. On appliquera alors le théorème de Poincaré-Bendixon pour affirmer l'existence d'un cycle limite.

On commence par enlever au domaine R un petit disque de centre (h_*, p_*). Le nouveau domaine ainsi formé reste encore absorbant. On modifie maintenant le deux bords « bas» et « gauche » de R comme dans la figure de droite de la figure 3. On fixe $0 < p' < p_*$ et $h' = p'/(\alpha(1 + p'))$. Le bord « bas » de R' est formé d'une trajectoire se terminant à (h', p') et coupant l'axe vertical $h = 1/\alpha$. Le bord « gauche » de R' est formé du segment $p' < p < \gamma + 1$ à $h = h'$. ce nouveau domaine R' devient absorbant.