

Estimation ponctuelle et intervalle de confiance

Exercice 1. On considère un échantillon de loi gaussienne de paramètre (μ, σ^2) . On note $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ et $\bar{Y} = \bar{X}(1 - \bar{X})$.

1. Calculer $\mathbb{E}[\bar{Y}]$. (Indication : $\mathbb{E}[(\bar{X} - \mu)^2] = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$.)
2. Peut-on dire que \bar{Y} est un estimateur sans biais de $\mu(1 - \mu)$?
3. Comment modifier \bar{Y} pour qu'il devienne sans biais ? (Indication : $\mathbb{E}[S_{n-1}^2] = \sigma^2$.)

Exercice 2. On considère un échantillon (X_1, \dots, X_n) de loi exponentielle de paramètre λ (de densité $\lambda e^{-\lambda x}$, pour $x \geq 0$). On cherche à estimer $e^{-\lambda}$. Pour cela on définit un nouvel échantillon (Y_1, \dots, Y_n) où

$$Y_i = 1 \text{ si } X_i > 1, \quad Y_i = 0 \text{ si } X_i \leq 1.$$

On pose $\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$. Montrer que \bar{Y} est un estimateur sans biais de $e^{-\lambda}$.

Exercice 3. Le temps de vie en heure d'un certain composant électronique est supposé distribué suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On réunit les données suivantes :

4671	3331	5270	4973	1837
7783	6074	4777	5263	5418

Calculer un intervalle de confiance de la moyenne de la durée de vie de ce composant.

Exercice 4. Dans un échantillon de 197 pommes, on constate que 19 d'entre elles sont abîmées. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion de pommes abîmées.

Exercice 5. Un échantillon aléatoire de 16 voitures est soumis à un contrôle de vitesse. On mesure les vitesses suivantes en km/h :

49	71	78	58	83	74	64	86
56	65	55	64	65	72	87	56

Construire un intervalle de confiance de la moyenne des vitesses à 95%.

Exercice 6. Une enquête réalisée par "The Gallup Organization, Hongrie" en 2009, révèle que $60\% \pm 2\%$ des français sont contre l'adhésion de la Turquie dans l'Europe des 27 dans un avenir relativement proche. Le sondage a été conduit sur un échantillon de 914 personnes majeures. Quel niveau de confiance, l'institut de sondage a-t-il utilisé ?

Exercice 7. Lors d'un contrôle de fabrication de certaines pièces mécaniques, on constate que sur 150 pièces, 17 sont défectueuses.

1. Déterminer un intervalle de confiance au risque 5% de la proportion de pièces défectueuses.
2. Combien de pièces doit-on contrôler pour que la proportion observée soit correcte à 1% près au risque de 5%. ?

Exercice 8. On considère 10 sujets pris comme leurs propres témoins. On cherche à comparer deux soporifiques A et B administrés à chaque sujet à raison d'un comprimé par nuit et par sujet. Le tableau suivant indique le nombre d'heures de sommeil des 10 sujets, une première fois pour le soporifique A et une semaine plus tard pour le soporifique B.

sujet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	6	7	7	8	8	8	8	9	9	10
B	6	6	5	5	7	7	6	7	7	8

Déterminer l'intervalle de confiance au risque de 5% de la différence des résultats moyens obtenu entre A et B.

Exercice 9. On s'intéresse à la différence des espérances de vie entre l'Europe et l'Afrique. Différents sondages, pris sur des échantillons représentatifs dans chaque continent, donnent les résultats suivants :

Afrique		Europe	
orientale	51.1	de l'Est	68.6
centrale	47.2	du Nord	79.0
septentri.	68.9	du Sud	79.5
australe	48.9	de l'Ouest	80.0
occidentale	50.5	Source : Nations Unis	
sub-sahari.	50.1	2007	

Déterminer l'intervalle de confiance de la différence des espérances de vie entre l'Europe et l'Afrique à 2 % près d'erreur statistique.

Exercice 10. On cherche à calculer l'efficacité d'un nouvel engrais dans la culture de l'asperge. On partage pour cela 5 parcelles d'asperges en deux parties égales. L'une des moitiés de chaque parcelle, choisie aléatoirement, reçoit un nouvel engrais ; l'autre moitié n'est pas traitée. Le rendement par parcelle est le suivant :

parcelle	1	2	3	4	5
sans	327	204	246	312	279
avec	321	216	264	303	291

On demande de construire un intervalle de confiance au seuil 95 % de la différence de rendement. On introduira pour cela un modèle statistique gaussien $N(\mu, \sigma^2)$ de différence de rendement moyen μ et d'écart type σ à estimer. On définira des estimateurs, puis on construira un intervalle de confiance théorique. On soignera enfin l'application numérique en précisant les valeurs tirées des tables de loi.

Exercice 11. *On désire évaluer le nombre N d'individus d'une espèce animale vivant sur une île. On commence pour cela par capturer 800 individus que l'on marque et relache juste après. Après avoir laissé les individus se remélanger dans la population globale, on capture à nouveaux 1000 individus parmi lesquels on dénombre 250 individus marqués. En déduire un intervalle de confiance de N à une erreur près de 5%.*