Variables aléatoires continues et lois uselles

Exercice 1. *On considère une variable X à valeurs dans $[0,1]$ définie par la densité $f(x) = kx$.*

- *Déterminer k pour que f soit une densité de probabilité.*
- *Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(X)$.*

Même question avec la densité $f(x) = k(1-|x|)$ définie sur $[-1,+1]$.

Exercice 2. *Une v.a. suit une loi de densité $f(x)$ définie par*

$$f(x) = \frac{k}{x^3} \quad \text{si } x \geq x_0, \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

où $x_0 > 0$ est une constante positive. Déterminer la constante k pour que $f(x)$ soit bien une densité et préciser la fonction de répartition.

Exercice 3. *On considère la v.a. X de densité*

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \quad \text{si } 0 \leq x \leq \theta, f(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

où θ est un nombre positif donné. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 4. *Soit X une v.a. de densité*

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \quad \text{si } x > \theta, \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon,}$$

où θ est un paramètre réel donné.

(1) Déterminer la fonction de répartition.

(2) Soit $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi que X et posons $M_n = \min(X_1, \cdots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de la v.a. M_n.

Exercice 5. *Soit X une v.a. normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer (a) $\mathbb{P}(0,53 < X < 2,73)$, (b) $\mathbb{P}(-0,53 < X < 2,73)$, (c) $\mathbb{P}(|X| > 2,27)$, (d) $\mathbb{P}(|X| < 1,45)$. Déterminer les écarts x tels que (e) $\mathbb{P}(|X| > x) = 0.78$, (f) $\mathbb{P}(|X| < x) = 0,22$, (g) $\mathbb{P}(X < x) = 0.93$, (h) $\mathbb{P}(X < x) = 0.22$.*

Exercice 6. *Sur 100 observations d'une variable X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on observe le décompte suivant : $X < 18$, 25 fois, $18 < X < 25$, 40 fois, $X > 25$, 35 fois. Calculer la moyenne de X.*

Exercice 7. *Une usine fabrique un lot de résistances électriques de 10 ohms. La résistance R de chaque composant est en fait une v.a. distribuée uniformément entre 9.9 et 10.1 ohms. On appelle conductance, l'inverse de la résistance : $C = 1/R$.*

1. *Déterminer la fonction de répartition $F(x)$ de la variable R ; puis tracer son graphe.*
2. *Déterminer la fonction de répartition de la v.a. $C = 1/R$; puis déterminer sa densité.*

Exercice 8. *Une forêt contient* 30% *de platanes et* 70% *d'érables. La vitesse de croissance des platanes est une v.a. normale d'espérance* 7.8 *cm/an et d'écart-type* 0.8 *cm/an ; celle des érables est une v.a. normale d'espérance* 8.2 *cm/an et d'écart-type* 0.8 *cm/an. On appellera V, la vitesse de croissance d'un arbre quelconque tiré au hasard de cette forêt.*

1. *Calculer la probabilité que V soit inférieure à* 7.4 *cm/an.*
2. *La vitesse de croissance d'un arbre a été trouvée inférieure à* 7.4 *cm/an ; quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un platane ?*
3. *Déterminer la densité de la v.a. V. Déterminer son espérance, puis son écart-type.*