Département de Formation
Premier Cycle

Année 2003–2004
SVTE
Mathématiques
Documents non autorisés

2 Juin 2004
SVT 101
Durée : 1h30

Exercice 1. On se propose de déterminer une primitive de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x-6x^2}.$$

(i) Déterminer deux constantes a et b telles que

$$f(x) = \frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1+3x}.$$

(ii) Déterminer alors une primitive de $f(x)$.

Exerice 2. On considère l'équation différentielle de fonction inconnue $y(x)$:

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = x^2.$$

(i) Déterminer la solution générale de l'équation homogène.
(ii) Déterminer une solution particulière de l'équation non homogène.
(iii) Trouver la solution $y(x)$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 3. On choisit au hasard 4 personnes et on admet qu'il y a autant de chance de choisir un garçon que de choisir une fille. On appelle X, le nombre de garçons parmi ces 4 personnes et Y, le nombres de couples fille/garçon qu'on peut former.
(i) Donner la loi de X (valeurs prises par X et la probabilité que X prenne ses valeurs).
(ii) Donner numériquement les valeurs de Y en fonction de celles de X. En déduire la loi de Y.
(iii) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exrecice 4. On considère 3 urnes, U_1, U_2, U_3 contenant respectivement, 2 boules noires, 2 boules blanches et dans l'urne U_3, une boule blanche et une boule noire.
(i) Une personne choisit au hasard une urne et ne s'intéresse qu'à l'événement : $A =$ "l'urne choisie contient au moins une boule noire". Déterminer la probabilité d'obtenir l'urne U_1 sachant A.

(ii) Une personne choisit au hasard une urne puis une boule dans celle-ci et ne s'intéresse maintenant qu'à l'événements :$B =$ "la boule tirée est noire". Déterminer à nouveau la probabilité d'obtenir l'urne U_1 sachant B.

Exercice 5. On définit sur l'ensemble $[-1, 1]$ une fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} b(1+x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ b(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(i) Dessiner le graphe de f.
(ii) Déterminer la valeur de b telle que f soit la densité d'une variable aléatoire définie sur $[-1, 1]$. Soit Z une telle v.a.
(iii) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
(iv) Calculer $\mathrm{Var}(Z)$ et $\sigma(Z)$.

Exerice 6. Une cabine téléphérique peut accepter 50 personnes et ne doit pas dépasser en poids 4700 Kg. On suppose que chaque personne est une v.a. suivant une loi normale de moyenne 80 Kg et d'écart type 12 Kg. On suppose aussi que chaque personne a le droit d'emporter avec elle des bagages et que chaque bagage est une v.a. suivant une loi normale de moyenne 10α Kg et d'écart type 5α Kg où α est un paramètre réel positif. On suppose enfin que X et Y sont indépendantes.

(i) On note $W = X + Y$ la variable aléatoire qui représente le poids d'une personne avec ses bagages. Pourquoi W suit-elle une loi normale ? Calculer en fonction de α, $\mu = \mathbb{E}(W)$ et $\sigma = \sigma(W)$. Vérifier que pour $\alpha = 1$ on a bien $\mu = 9O$ kg et $\sigma = 13$ kg.
(ii) On note W_{50} le poids cumulé de 50 personnes avec leurs bagages ; les personnes sont choisies arbitrairement et de façon indépendante. Calculer en fonction de α l'espérance $\mathbb{E}(W_{50})$ et l'écart-type $\sigma(W_{50})$.
(iii) On suppose que $\alpha = 1$. Déterminer la probabilité que la cabine soit en surcharge.
(iv) Quelle valeur faut-il donner à α pour que probabilité que la cabine soit en surcharge soit inférieure à 1%.

Corrigé de l'examen du 2 juin 2004

Exercice 1.

(i) En réduisant tout au même dénominateur, on obtient

$$f(x) = \frac{(a+b)+(3a-2b)x}{1+x-6x^2} \qquad \begin{cases} a+b &= 1 \\ 3a-2b &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a &= 2/5 \\ b &= 3/5 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2}{5}\frac{1}{(1-2x)} + \frac{3}{5}\frac{1}{(1+3x)}.$$

(ii) Les primitives se déduisent facilement :

$$\int f(x)\,dx = -\frac{1}{5}\ln|1-2x| + \frac{1}{5}\ln|1+3x| = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{1+3x}{1-2x}\right| + c.$$

Exercice 2.

(i) l'équation caractéristique de (E)

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

a pour racine $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. L'équation homogène a donc pour solution générale

$$y_H(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}.$$

(ii) Le second membre est de la forme $(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)e^{kx}$ avec $k = 0$ et $c_0 = c_1 = 0$. Comme $k \neq r_{1,2}$, on peut donc chercher une solution particulière sous la forme

$$y_P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Après calcul, on obtient

$$y_P'' + 2y_P' - 3y_P = (-3a)x^2 + (4a-3b)x + (2a+2b-3c) = x^2.$$

Cette dernière égalité est réalisée pour tout x, d'où

$$\begin{cases} 2a+2b-3c &= 0 \\ 4a-3b &= 0 \\ -3a = 1 & \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= -1/3 \\ b &= -4/9 \\ c &= -14/27 \end{cases}$$

Ce qui donne comme solution particulière

$$y_P(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{14}{27}.$$

(iii) La solution générale de (E) est de la forme $y(x) = y_P(x) + y_H(x)$ où λ et μ sont arbitraires. On demande donc d'ajuster ces deux constantes pour que la solution cherchée vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On a

$$y'(x) = \lambda e^x - 3\mu e^{-3x} - \frac{1}{27}(18x + 12)$$

$$\begin{cases} y(0) & = \lambda + \mu - \frac{14}{27} = 1 \\ y'(0) & = \lambda - 3\mu - \frac{12}{27} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = \frac{41}{27} \\ \lambda - 3\mu = -\frac{15}{27} \end{cases}$$

d'où $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{14}{27}$. La solution de (E) vérifiant la condition initiale est donc

$$y(x) = e^x + \frac{14}{27}e^{-3x} - \frac{1}{27}(9x^2 + 12x + 14).$$

Exercice 4.

(i) Soit X le nombre de garçons parmi 4 personnes. Les valeurs possibles de X sont $X = 0, 1, 2, 3, 4$. Si $X = 0$, les 4 personnes sont toutes des filles ; si $X = 1$, : il y a $\binom{4}{1}$ possibilités de choisir 1 garçon parmi 4 personnes ; si $X = 2$, il y a $\binom{4}{2}$ possibilités de choisir 2 garçons parmi 4 personnes, ainsi de suite. Comme la probabilité de choisir une fille ou une garçon est de $\frac{1}{2}$, X suit donc la loi binomiale$B(n, p)$ avec $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$, soit $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k}(\frac{1}{2})^4$. On obtient ainsi le tableau

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

(ii) On commnece par calculer, pour chaque valeur de X, le nombre Y de couples possibles. Par exemple, si $X = 1$, il y a 1 garçon et 3 filles, on peut donc former 1 couple (il y a bien 3 manières de former ce couple). On obtient le tableau

X	0	1	2	3	4
Y	0	1	2	1	0

D'où la loi de Y

l	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = l)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{6}{16}$

(iii) L'espérance de Y est donnée par la formule

$$\mathbb{E}(Y) = 0 * \mathbb{P}(Y = 0) + 1 * \mathbb{P}(Y = 1) + 2 * \mathbb{P}(Y = 2).$$

On obtient ici $\mathbb{E}(Y) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1,25$. De même

$$\mathbb{E}(Y^2) = 0^2 * \mathbb{P}(Y = 0) + 1^2 * \mathbb{P}(Y = 1) + 2^2 * \mathbb{P}(Y = 2).$$

On a $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{32}{16} = 2$. La variance de Y est donc donnée par

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 2 - \frac{25}{16} = \frac{7}{16}.$$

Exercice 3.

(i) Un événement élémentaire consiste ici à choisir une urne. Soit $\Omega = \{U_1, U_2, U_3\}$ l'espace fondamental où $U_i =$ «l'urne U_i a été choisie » . Chaque tirage a même probabilité donc

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(U_3) = \frac{1}{3}.$$

La personne ne garde que les tirages d'urnes contenant au moins une boule noire : soit $A = \{U_1, U_3\}$ les tirages possibles. Parmi tous ces tirages, la probabilité de choisir U_1 est $\mathbb{P}(U_1|A) = \mathbb{P}(U_1)/\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

(ii) Un événement élémentaire consiste maintenant à choisir d'abord une urne, ensuite une boule dans cette urne : soit

$$\Omega = \{U_1N_1, U_1N_2, U_2B_1, U_2B_2, U_3N, U_3B\}$$

l'ensemble fondamental. Comme chaque choix d'urne est équiprobable et comme chaque urne contient le même nombre de boules, chaque événement élémentaire de Ω a même probabilité. L'événement $B =$ «la boule tirée est noire » s'écrit donc

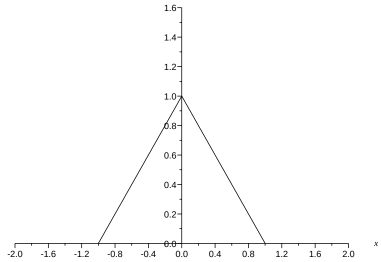
$$B = \{U1N_1, U_1N_2, U_3N\}.$$

La probabilité d'obtenir U_1 parmi ces tirages est donnée est

$$\mathbb{P}(U_1|B) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 5.

(i) Le graphe de f est



(ii) Pour que $f(x)$ soit une densité d'une variable aléatoire, il faut que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$, soit $b = 1$.

(iii) L'espérance d'une variable Z est donnée par

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = 0.$$

(iv) On calcule d'abord

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}.$$

Puis on obtient $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{1}{6}$, $\sigma(Z) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Exercice 6.

(i) Comme X et Y suivent des lois normales et que ces deux variables sont indépendantes, $W = X + Y$ suit aussi une loi normale de paramètres $\mu_W = \mu_X + \mu_Y$ et $\sigma_W^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. On a

$$\mu_W = \mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 80 + 10\alpha \text{ kg}$$
$$\sigma_W = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{144 + 25\alpha^2}.$$

Pour $\alpha = 1$, $\mu_W = 90$ et $\sigma_W = \sqrt{169} = 13$.

(ii) Comme W_{50} est la somme de 50 variables indépendantes qui suivent la même loi normale $\mathcal{N}(\mu_W, \sigma_W^2)$, W_{50} suit la loi normale $\mathcal{N}(50\mu_W, 50\sigma_W^2)$,

$$\mathbb{E}(W_{50}) = 500(8+\alpha), \quad \sigma(W_{50}) = \sqrt{50}\sqrt{144+25\alpha^2}.$$

(iii) La cabine est en surcharge si $W_{50} \geq 4700$. Sa probabilité est donnée par (on a supposé $\alpha = 1$) :

$$\mathbb{P}(W_{50} \geq 4700) = \mathbb{P}\Big(N = \frac{W_{50} - \mu(W_{50})}{\sigma(W_{50})} \geq \frac{4700 - 500(8+\alpha)}{\sqrt{50}\sqrt{144+25\alpha^2}}\Big)$$
$$= \mathbb{P}(N \geq 2.1757) = 1 - \mathbb{P}(N < 2.1757) = 1 - 0.985 = 1,5\%.$$

(iv) On veut maintenant que la probabilité de dépasser 4700 kg soit au plus 1% c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(W_{50} \geq 4700) = \mathbb{P}(N \geq z(\alpha)) = 1\% \text{ où } z(\alpha) = \frac{4700 - 500(8+\alpha)}{\sqrt{50}\sqrt{144+25\alpha^2}}.$$

Nécessairement, $z(\alpha) = 2,326$ et α est solution de l'équation

$$24,3237\alpha^2 - 70\alpha + 45,1046 = 0 \quad \text{et} \quad 4700 - 500(8+\alpha) \geq 0$$

soit $\alpha = (70 - \sqrt{4900 - 4 * 24.3237 * 45.1046})/(2 * 24.3237) = 0,97.$