Département Licence

Année 2005–2006 | 29 Mai 2006
SVTE | SVT201
Mathématiques | Durée : 1h30
Ph. Thieullen

Toute formule utilisée devra être reproduite sur la copie. Les exercices sont indépendants. La calculette Bordeaux 1 est autorisée, mais tout autre document est interdit.

Exercice 1. On considère le système linéaire en (x, y) ainsi que sa matrice définis par

$$\begin{cases} x & - & y & = & -m-2 \\ x(1-m) & - & y(1+m) & = & -2 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1-m & -1-m \end{bmatrix}$$

où m est un paramètre.

1. Résoudre le système suivant les valeurs de m.
2. Montrer que $A^2 + mA - 2m\,\mathrm{Id} = 0$. En déduire que, pour $m \neq 0$, A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2. La distribution de la hauteur de 50 pieds de maïs pris au hasard, mesurés en cm, est donnée dans le tableau suivant

hauteur	140–160	160–170	170–180	180–190	190–200	200–230
effectif	2	3	16	9	14	6

1. Tracer sur la moitié de la feuille millimétrée l'histogramme de cette distribution. On constatera que les classes ne sont pas toutes de même amplitude. On précisera sur le graphique les unités des axes et les hauteurs de chaque rectangle.
2. Tracer sur la deuxième moitié de la feuille, la courbe des hauteurs cumulées.
3. Déterminer la hauteur moyenne d'un pied de maïs. On précisera bien la formule utilisée.
4. Déterminer la médiane de cette distribution.

Exercice 3. Des paquets d'une lessive de consommation courante contiennent un certain produit faisant l'objet d'une réglementation particulière. On appelle X la variable aléatoire représentant cette quantité mesurée en mg. On admet que X suit une loi normale de d'espérance μ et d'écart-type σ inconnus. Un laboratoire indépendant choisit au hasard 10 paquets et constate les quantités suivantes

59.3	57.7	57.2	55.9	55.5	54.1	53.4	50.8	48.2	47.4

Déterminer un intervalle de confiance de μ pour un niveau de confiance de 95%. On précisera bien les estimateurs utilisés.

Exercice 4. Une assemblée générale de 2507 étudiants en grève (hors bulletins nuls) vote pour ou contre la reprise du travail. Les semaines précédentes montraient une très large majorité d'étudiants contre la reprise. Cette fois-ci, 1152 votent contre la reprise, 1355 votent pour la reprise.

1. Au niveau de signification de 5%, ces résultats vous semblent-ils compatibles avec l'hypothèse que 50% de l'ensemble des étudiants est contre la reprise ? On précisera le test d'hypothèse utilisé en soignant tous les détails (hypothèse nulle, variable de décision, zone de rejet, valeur critique, ..., conclusion).
2. Quel est le plus petit niveau de signification possible permettant de rejeter l'hypothèse que 50% de l'ensemble des étudiants est contre la reprise ?

Exercice 5. Un agriculteur croise deux races pures de tulipes : des tulipes rouges et des tulipes jaunes. Il obtient à la première génération des tulipes toutes oranges. A la deuxième génération, après autofécondation des plantes de la première génération, il obtient 24 tulipes rouges, 57 tulipes oranges et 27 tulipes jaunes. Il cherche à savoir si la couleur des tulipes est gérée par un modèle de couple d'allèles (R, J), c'est-à-dire si les tulipes rouges ont un génotype RR, si les tulipes jaunes ont un génotype JJ et si les tulipes oranges ont un génotype RJ où aucun des deux allèles n'est prédominant sur l'autre.

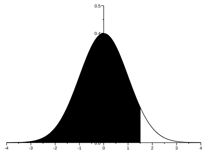
1. Expliquer pourquoi la probabilité théorique d'obtenir des tulipes rouges, oranges ou jaunes, à la deuxième génération, est respectivement égale à 1/4, 1/2 ou 1/4.
2. Déterminer par un test d'hypothèse au niveau de signification de 5% si les résultats précédents de l'agriculteur confirme l'hypothèse du modèle théorique. (On prendra soin de définir proprement l'hypothèse nulle, variable de décision, région critique, les tables utilisées,..., conclusion)

Barême indicatif sur 200 : 30 - 40 - 20 - 60 - 50

Table de la loi normale

Table de la fonction de répartition

$$p = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2}t^2\Big)\, dt$$



Par exemple : si $x = 1.5 + 0.04$ alors $p = 0.9382$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Cas des grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7
p	0.998650	0.999032	0.999313	0.999517	0.999663	0.999767	0.999841	0.999892
1-p	0.001350	0.000968	0.000687	0.000483	0.000337	0.000233	0.000159	0.000108

x	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
p	0.999928	0.999952	0.999968	0.999979	0.999987	0.999991	0.999995	0.999997
1-p	0.000072	0.000048	0.000032	0.000021	0.000013	0.000009	0.000005	0.000003

Table de la loi normale : suite

Graphe de la densité $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}t^2\right)$.

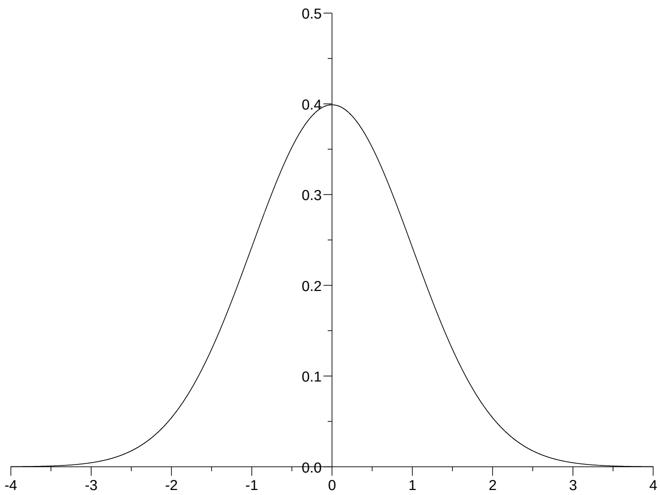


Table de dépassement de l'écart absolu : $\mathbb{P}(|X| > z_\alpha) = \alpha$

Par exemple : si $\alpha = 0.1 + 0.03$ alors $z_\alpha = 1.514$.

Cas des grandes valeurs de α :

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.5	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.6	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.7	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.8	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.9	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

Cas des petites valeurs de α :

α	0.010	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001	0.00005	0.00002	0.00001
x	2.576	2.807	3.090	3.291	3.481	3.719	3.891	4.056	4.265	4.417

Table de la loi de Student

Graphe de la densité $\phi(t) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\Gamma(d/2)\sqrt{\pi d}}(1 + \frac{t^2}{d})^{-\frac{d+1}{2}}$

$X = \dfrac{U}{\sqrt{V/d}}$ où U et V suivent les lois $N(0,1)$ et $\chi^2(d)$ et sont indépendantes.

$\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = d/(d-2)$.

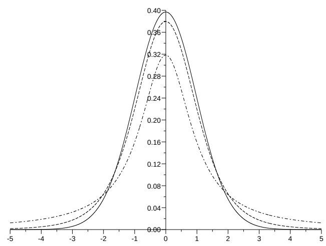


Table de dépassement de l'écart absolu : $\mathbb{P}(|X| > t_\alpha) = \alpha$

La première colonne donne le nombre de degrés de liberté *ddl*. La première ligne donne la probabilité α d'être dépassée. Par exemple, si $ddl = 10$ et $\alpha = 0.05$ alors $t_\alpha = 2.228$.

	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
35	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
45	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	2.952	3.281	3.520
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496

Table de la loi du chi-deux

Table des quantiles : $\mathbb{P}(\chi^2(d) < q_\alpha) = \alpha$

La première colonne donne le nombre de degrés de liberté *ddl*. La première ligne donne la probabilité α. Les entrées du tableau donnent q_α. Par exemple, si $ddl = 18$ et $\alpha = 0.01$ alors $q_\alpha = 7.015$.

	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.455
2	0.002	0.004	0.010	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	1.386
3	0.024	0.039	0.072	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	2.366
4	0.091	0.129	0.207	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	3.357
5	0.210	0.280	0.412	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	4.351
6	0.381	0.486	0.676	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	5.348
7	0.598	0.741	0.989	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	6.346
8	0.857	1.038	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	7.344
9	1.152	1.370	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	8.343
10	1.479	1.734	2.156	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	9.342
11	1.834	2.126	2.603	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	10.341
12	2.214	2.543	3.074	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	11.340
13	2.617	2.982	3.565	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	12.340
14	3.041	3.440	4.075	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	13.339
15	3.483	3.916	4.601	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	14.339
16	3.942	4.408	5.142	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	15.338
17	4.416	4.915	5.697	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	16.338
18	4.905	5.436	6.265	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	17.338
19	5.407	5.969	6.844	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	18.338
20	5.921	6.514	7.434	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	19.337
21	6.447	7.070	8.034	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	20.337
22	6.983	7.636	8.643	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	21.337
23	7.529	8.212	9.260	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	22.337
24	8.085	8.796	9.886	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	23.337
25	8.649	9.389	10.520	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	24.337
26	9.222	9.989	11.160	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	25.336
27	9.803	10.597	11.808	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	26.336
28	10.391	11.212	12.461	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	27.336
29	10.986	11.833	13.121	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	28.336
30	11.588	12.461	13.787	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	29.336
35	14.688	15.686	17.192	18.509	20.027	22.465	24.797	27.836	34.336
40	17.916	19.032	20.707	22.164	23.838	26.509	29.051	32.345	39.335
45	21.251	22.477	24.311	25.901	27.720	30.612	33.350	36.884	44.335
50	24.674	26.006	27.991	29.707	31.664	34.764	37.689	41.449	49.335

Loi du chi-deux : suite

Graphe de la densité $\phi(t) = \frac{(1/2)^{d/2}}{\Gamma(d/2)} t^{d/2-1} \exp(-\frac{t}{2})$

Γ est définie par récurrence par :
$\Gamma(u) = (u-1)\Gamma(u-1)$,
$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$V = \sum_{i=1}^{d} X_i^2$ où X_i suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
$\mathbb{P}(V > x) = \int_x^{+\infty} \phi(t)\, dt$

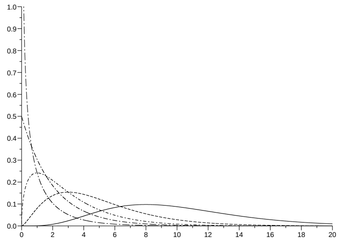


Table des quantiles : suite

	0.75	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
1	1.323	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	7.879	9.550	10.828
2	2.773	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	10.597	12.429	13.816
3	4.108	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	5.385	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	14.860	16.924	18.467
5	6.626	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	16.750	18.907	20.515
6	7.841	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	18.548	20.791	22.458
7	9.037	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	20.278	22.601	24.322
8	10.219	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	21.955	24.352	26.124
9	11.389	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	23.589	26.056	27.877
10	12.549	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	25.188	27.722	29.588
11	13.701	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	26.757	29.354	31.264
12	14.845	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	28.300	30.957	32.909
13	15.984	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	29.819	32.535	34.528
14	17.117	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	31.319	34.091	36.123
15	18.245	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	32.801	35.628	37.697
16	19.369	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	34.267	37.146	39.252
17	20.489	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	35.718	38.648	40.790
18	21.605	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	37.156	40.136	42.312
19	22.718	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	38.582	41.610	43.820
20	23.828	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	39.997	43.072	45.315
21	24.935	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	41.401	44.522	46.797
22	26.039	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	42.796	45.962	48.268
23	27.141	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	44.181	47.391	49.728
24	28.241	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	45.559	48.812	51.179
25	29.339	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	46.928	50.223	52.620
26	30.435	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	48.290	51.627	54.052
27	31.528	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	49.645	53.023	55.476
28	32.620	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	50.993	54.411	56.892
29	33.711	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	52.336	55.792	58.301
30	34.800	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	53.672	57.167	59.703
35	40.223	41.778	46.059	49.802	54.244	57.342	60.275	63.955	66.619
40	45.616	47.269	51.805	55.758	60.436	63.691	66.766	70.618	73.402
45	50.985	52.729	57.505	61.656	66.555	69.957	73.166	77.179	80.077
50	56.334	58.164	63.167	67.505	72.613	76.154	79.490	83.657	86.661